Bemerkungen zur Combinationslehre

Autor(en): **Scherrer, F.R.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Thurgauischen Naturforschenden Gesellschaft**

Band (Jahr): **9 (1890)**

PDF erstellt am: **11.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-593832

Bemerkungen zur Combinationslehre.

Von

F. R. Scherrer,

Lehrer der Mathematik an der thurg. Kantonsschule.

Bildet man von n unter sich verschiedenen Elementen

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ldots\ a_n$$

alle Permutationen, deren Anzahl bekanntlich

$$P_n = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\ldots\ n = n!$$

ist, so bleiben, wenn man bei sämtlichen Permutationen die n-k letzten Elemente entfernt, Gruppen übrig, welche aus je k der Elemente a bestehen und deshalb Variationen der letzteren zur k^{ten} Klasse sind. Es wird indessen bei dieser Erzeugungsweise der Variationen k^{ter} Klasse jede derselben $(n$-$k)!$ mal erhalten, weil je $(n$-$k)!$ Permutationen der n Elemente sich nur durch die Reihenfolge der n-k letzten Elemente von einander unterscheiden; folglich ist die Anzahl aller Variationen von n Elementen zur k^{ten} Klasse

$$V_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} = n\,(n-1)\,(n-2) \ldots\ldots\ (n-k+1)$$

Je $k!$ dieser Variationen unterscheiden sich lediglich durch die Anordnung der Elemente von einander und zählen daher als eine einzige Combination; es ist deshalb die Anzahl aller Combinationen ohne Wiederholung von n Elementen zur k^{ten} Klasse

$$C_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)\ k!} = \frac{n\,(n-1)\,(n-2) \ldots (n-k+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \quad \ldots \quad k} = \binom{n}{k}$$

Um die Anzahl aller Combinationen k^{ter} Klasse mit Wiederholung der Elemente a zu erhalten, stelle man zunächst folgende Tabelle auf:

$$
\begin{array}{lllll}
a_1 & a_2 & a_3 \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{n-1} & a_n \\
 & & & & \\
b_1 & b_2 & b_3 \ldots\ldots\ldots\ldots & b_{n-1} & b_n \\
b_2 & b_3 & b_4 \ldots\ldots\ldots\ldots & b_n & b_{n+1} \\
b_3 & b_4 & b_5 \ldots\ldots\ldots\ldots & b_{n+1} & b_{n+2} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
b_{k-1} & b_k & b_{k+1} \ldots\ldots\ldots & b_{n+k-3} & b_{n+k-2} \\
b_k & b_{k+1} & b_{k+2} \ldots\ldots\ldots & b_{n+k-2} & b_{n+k-1},
\end{array}
$$

wo b_1 b_2 b_3 .... b_{n+k-1} beliebige von einander verschiedene, in k Zeilen geordnete Elemente sind. Alsdann entspricht jeder Combination k^{ter} Klasse ohne Wiederholung der b eine Combination mit Wiederholung der a, welche man erhält, indem man zuerst die Combination der b nach dem Range der Indices ordnet, hernach das erste Element derselben in der ersten Zeile, das zweite in der zweiten Zeile u. s. w., schliesslich das k^{te} in der letzten Zeile der Tabelle der Elemente b aufsucht und durch das jeweils darüberstehende Element a ersetzt, wodurch eine geordnete Combination k^{ter} Klasse mit Wiederholung der a entsteht. Will man umgekehrt zu einer Combination k^{ter} Klasse mit Wiederholung der a die zugehörige Combination ohne Wiederholung der b aufsuchen, so ordne man sie zuerst nach dem Range der Indices, ersetze hierauf das erste Element derselben durch das in der Tabelle unter ihm stehende Element in der ersten Zeile der b, das zweite durch das unter ihm stehende Element in der zweiten Zeile der b u. s. w., endlich das letzte Element durch das unter ihm stehende Element der letzten Zeile, wodurch eine geordnete Combination k^{ter} Klasse ohne Wiederholung der Elemente b gewonnen wird, welcher die gegebene in der oben erörterten Weise entspricht. Es gehört somit zu jeder Combination k^{ter} Klasse mit Wiederholung der Elemente a stets eine, aber auch nur eine Combination derselben Klasse ohne Wiederholung der Elemente b, folglich gibt es ebenso viele Combinationen k^{ter} Klasse mit Wiederholung von n Elementen, wie Combinationen k^{ter} Klasse ohne Wiederholung von $n+k-1$ Elementen; mithin ist die Anzahl der ersteren

$$C_{\mathrm{n}}^{\mathrm{w}(\mathrm{k})} = \binom{n+k-1}{k};$$

ein Ausdruck, welcher nach der landläufigen Methode mit Hülfe von verhältnissmäsig umständlichen Rechnungen gewonnen wird.

Mai 1887.