Zeitschrift: Mitteilungen der Thurgauischen Naturforschenden Gesellschaft
Herausgeber: Thurgauische Naturforschende Gesellschaft
Band: 9 (1890)

Artikel: Neue Herleitung der unendlichen Potenzreihen für cos x und sin x
Autor: Scherrer, F.R.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-593833

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Neue Herleitung der unendlichen Potenzreihen für cos x und sin x.

Von

F. R. Scherrer,

Lehrer der Mathematik an der thurg. Kantonsschule.

Die Exponentialreihe

$$f_{(z)} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots\cdots\cdots\cdots$$

convergirt und ist daher eine stetige Funktion der Variabeln z für jeden endlichen sowohl reellen als auch complexen Wert der letzteren; überdies ist

$$f_{(z_1)} \cdot f_{(z_2)} = f_{(z_1 + z_2)}.$$

Die Summen der beiden unendlichen Reihen

$$f_{(iy)} = 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i\,\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \cdots\cdots$$

und

$$f_{(-iy)} = 1 - iy - \frac{y^2}{2!} + i\,\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} - \cdots\cdots$$

sind conjugirt complexe Grössen; daher ist, wenn man ihren Modul mit r bezeichnet

$$r^2 = f_{(iy)} \cdot f_{(-iy)} = f_{(0)}$$

d. h.

$$r = 1;$$

mithin kann

$$f_{(iy)} = \cos x + i \sin x$$

10741
126528

und insbesondere

$$\cos x = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \ldots\ldots\ldots$$

$$\sin x = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \ldots\ldots\ldots$$

gesetzt werden, wobei x das analytische Mass eines Kreisbogens darstellt, welcher für jeden reellen Wert von y so gewählt werden mag, dass

$$0 \leqq x < 2\pi$$

ist. Man erhält nun, wenn y zwischen 0 und 1 liegt, positive Werte für $\cos x$ und $\sin x$, also ist in diesem Falle x ein Bogen des ersten Quadranten, welcher mit y zugleich verschwindet.

Da $f(i\frac{p}{q}y)$, wenn p und q zwei relative Primzahlen sind, eine der q^{ten} Wurzeln von $fipy$ ist, so hat man

$$f(i\frac{p}{q}y) = \left(\cos\frac{p}{q}x + i\sin\frac{p}{q}x\right)\left(\cos\frac{k\,2\pi}{q} + i\sin\frac{k\,2\pi}{q}\right)$$

wo k eine noch zu bestimmende ganze Zahl bedeutet, welche der Ungleichheit genügt

$$0 \leqq k < q$$

und welche ausserdem zufolge der Stetigkeit von $f(i\frac{p}{q}y)$ nicht von y abhängen kann. Lässt man, um dieselbe zu ermitteln, y allmälig gleich 0 werden, so nehmen nach dem oben Gesagten die linke Seite und der erste Faktor der rechten Seite der letzten Gleichung den Wert 1 an; mithin ist der zweite Faktor der rechten Seite ebenfalls gleich 1, also

$$k = 0$$

und

$$f(i\frac{p}{q}y) = \cos\frac{p}{q}x + i\sin\frac{p}{q}x.$$

Hieraus kann man, gestützt auf die Stetigkeit der hier in Betracht fallenden Funktionen, auf die Gültigkeit der Gleichung

$$f_{(iny)} = \cos nx + i\sin nx$$

für jedes reelle n schliessen; d. h. es ist x zu y proportional, so dass man

$$y = \lambda x$$

setzen kann, wo λ eine Constante ist. Der Wert der letzteren ergibt sich leicht, wenn man bedenkt, dass

$$f(i\lambda x) = \cos x + i \sin x,$$

daher insbesondere

$$\sin x = \lambda x - \frac{\lambda^3 x^3}{3!} + \frac{\lambda^5 x^5}{5!} - \frac{\lambda^7 x^7}{7!} + \ldots\ldots\ldots$$

und

$$\frac{\sin x}{x} = \lambda - \frac{\lambda^3 x^2}{3!} + \frac{\lambda^5 x^4}{5!} - \frac{\alpha^7 x^6}{7!} + \ldots\ldots\ldots$$

ist. Nähert sich nämlich x ohne Ende der Grenze 0, so gelangt die linke Seite der letzten Gleichung zu dem Grenzwert 1, während die rechte Seite gleich λ wird; also ist

$$\lambda = 1$$

und man hat

$$f_{(ix)} = \cos x + i \sin x,$$

woraus folgt

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\ldots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\ldots \quad .$$

Für den Argumentwert π erhält man hieraus

$$f(i\pi) = -1;$$

und

$$f^2(i\pi) = f(i\,2\pi) = +1,$$

folglich ist

$$f(i\,[x + 2k\pi]) = f(ix)$$

Definirt man also die Potenz e^{ix} durch die Gleichung

$$e^{ix} = f_{(ix)},$$

so erhält man für jeden reellen Wert von x

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

März 1884.