Neue Herleitung der unendlichen Potenzreihen für cos x und sin x

Autor(en): **Scherrer, F.R.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Thurgauischen Naturforschenden Gesellschaft**

Band (Jahr): **9 (1890)**

PDF erstellt am: **11.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-593833

Neue Herleitung der unendlichen Potenzreihen für cos x und sin x.

Von

F. R. Scherrer,

Lehrer der Mathematik an der thurg. Kantonsschule.

Die Exponentialreihe

$$f_{(z)} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots\cdots\cdots\cdots$$

convergirt und ist daher eine stetige Funktion der Variabeln z für jeden endlichen sowohl reellen als auch complexen Wert der letzteren; überdies ist

$$f_{(z_1)} \cdot f_{(z_2)} = f_{(z_1 + z_2)}.$$

Die Summen der beiden unendlichen Reihen

$$f_{(iy)} = 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i\,\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \cdots\cdots$$

und

$$f_{(-iy)} = 1 - iy - \frac{y^2}{2!} + i\,\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} - \cdots\cdots$$

sind conjugirt complexe Grössen; daher ist, wenn man ihren Modul mit r bezeichnet

$$r^2 = f_{(iy)} \cdot f_{(-iy)} = f_{(0)}$$

d. h.

$$r = 1;$$

mithin kann

$$f_{(iy)} = \cos x + i \sin x$$

und insbesondere

$$\cos x = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \ldots\ldots\ldots$$

$$\sin x = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \ldots\ldots\ldots$$

gesetzt werden, wobei x das analytische Mass eines Kreisbogens darstellt, welcher für jeden reellen Wert von y so gewählt werden mag, dass

$$0 \overline{\overline{<}} x < 2\pi$$

ist. Man erhält nun, wenn y zwischen 0 und 1 liegt, positive Werte für $\cos x$ und $\sin x$, also ist in diesem Falle x ein Bogen des ersten Quadranten, welcher mit y zugleich verschwindet.

Da $f(i\frac{p}{q}y)$, wenn p und q zwei relative Primzahlen sind, eine der q^{ten} Wurzeln von $fipy$ ist, so hat man

$$f(i\frac{p}{q}y) = \left\{\cos\frac{p}{q}x + i\sin\frac{p}{q}x\right\}\left\{\cos\frac{k\,2\pi}{q} + i\sin\frac{k\,2\pi}{q}\right\}$$

wo k eine noch zu bestimmende ganze Zahl bedeutet, welche der Ungleichheit genügt

$$0 \overline{\overline{<}} k < q$$

und welche ausserdem zufolge der Stetigkeit von $f(i\frac{p}{q}y)$ nicht von y abhängen kann. Lässt man, um dieselbe zu ermitteln, y allmälig gleich 0 werden, so nehmen nach dem oben Gesagten die linke Seite und der erste Faktor der rechten Seite der letzten Gleichung den Wert 1 an; mithin ist der zweite Faktor der rechten Seite ebenfalls gleich 1, also

$$k = 0$$

und

$$f(i\frac{p}{q}y) = \cos\frac{p}{q}x + i\sin\frac{p}{q}x.$$

Hieraus kann man, gestützt auf die Stetigkeit der hier in Betracht fallenden Funktionen, auf die Gültigkeit der Gleichung

$$f_{(iny)} = \cos nx + i\sin nx$$

für jedes reelle n schliessen; d. h. es ist x zu y proportional, so dass man

$$y = \lambda x$$

setzen kann, wo λ eine Constante ist. Der Wert der letzteren ergibt sich leicht, wenn man bedenkt, dass

$$f(i \lambda x) = \cos x + i \sin x,$$

daher insbesondere

$$\sin x = \lambda x - \frac{\lambda^3 x^3}{3!} + \frac{\lambda^5 x^5}{5!} - \frac{\lambda^7 x^7}{7!} + \dots\dots\dots$$

und

$$\frac{\sin x}{x} = \lambda - \frac{\lambda^3 x^2}{3!} + \frac{\lambda^5 x^4}{5!} - \frac{\alpha^7 x^6}{7!} + \dots\dots\dots$$

ist. Nähert sich nämlich x ohne Ende der Grenze 0, so gelangt die linke Seite der letzten Gleichung zu dem Grenzwert 1, während die rechte Seite gleich λ wird; also ist

$$\lambda = 1$$

und man hat

$$f_{(ix)} = \cos x + i \sin x,$$

woraus folgt

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\dots \quad .$$

Für den Argumentwert π erhält man hieraus

$$f(i\pi) = -1;$$

und

$$f^2(i\pi) = f(i\, 2\pi) = +1,$$

folglich ist

$$f(i\,[x + 2k\pi]) = f(ix)$$

Definirt man also die Potenz e^{ix} durch die Gleichung

$$e^{ix} = f_{(ix)},$$

so erhält man für jeden reellen Wert von x

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

März 1884.