Zur Trisektion des Winkels

Zur Trisektion des Winkels.

Von Dr. K. Matter.

Die Dreiteilung des Winkels, τριχοτόμια γωνίας, ist bekanntlich eins von den drei klassischen mathematischen Problemen des griechischen Altertums. Von seinem ersten Auftauchen erzählt Moritz Cantor im 1. Band seiner Geschichte der Mathematik. Neben den zwei in gleicher Reihe marschierenden Problemen: Quadratur des Zirkels und Verdoppelung des Würfels hat es mit am meisten zur Entwicklung der griechischen Mathematik beigetragen. Unter anderem führte, nach Cantor, die Trisektion zur Erfindung der ersten von der Kreislinie verschiedenen, durch bestimmte Eigenschaften gekennzeichneten und in ihrer Entstehung verfolgbaren krummen Linie, der *Linie des Hippias* oder der *Quadratrix*.

Es sind gewiß auch Versuche angestellt worden, die Aufgabe mit Hilfe des Zirkels und des Lineals zu lösen. Leider ist uns nichts von ihnen bekannt geworden.[1] Daß sie erfolglos bleiben mußten, zeigt uns die algebraische Lösung des Problems, welche identisch ist mit der Auflösung der kubischen Gleichung

$$x^3 = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Die Irreduzibilität dieser Gleichung, zufolge deren sie nicht durch Quadratwurzeln in endlicher Zahl lösbar ist, ist durch eine einfache Ueberlegung nachweisbar.[2] Sobald aber eine Gleichung, deren Grad über 2 ist, irreduzibel ist, kann das durch dieselbe zum Ausdruck gebrachte geometrische Problem mit Zirkel und Lineal nicht ausgeführt werden.

[1] Siehe *M. Cantor,* Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. 1. Band. Leipzig 1894.

[2] Den Beweis der Irreduzibilität siehe beispielsweise in *F. Klein,* Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie. Leipzig 1895.

Daß die Gleichung

$$x^3 = \cos\varphi + i \sin\varphi$$

die analytische Formulierung des Problems der Dreiteilung des Winkels bedeutet, zeigt die geometrische Deutung ihrer nach dem Moivreschen Satze in der Form aufstellbaren Wurzeln:

$$x_1 = \cos\frac{\varphi}{3} + i \sin\frac{\varphi}{3},$$

$$x_2 = \cos\frac{\varphi + 2\pi}{3} + i \sin\frac{\varphi + 2\pi}{3},$$

$$x_3 = \cos\frac{\varphi + 4\pi}{3} + i \sin\frac{\varphi + 4\pi}{3}.$$

Denn geometrisch bedeuten diese Wurzeln die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks auf dem Einheitskreise um den Anfangspunkt und, wie die Figur zeigt, entspricht x_1 der Winkel $\frac{\varphi}{3}$.

Um nun solche Probleme, deren algebraische Darstellung eine Gleichung dritten oder höheren Grades ist, geometrisch zu lösen, kann man sich in erster Linie, wie das schon die griechischen Geometer gezeigt, der Kegelschnitte bedienen. Soll man beispielsweise die kubische Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

oder die biquadratische

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

auflösen, so braucht man bloß

$$x^2 = y$$

zu setzen. Man findet in beiden Fällen die Wurzeln als die Abszissen der gemeinsamen Punkte zweier Kegelschnitte, einer Parabel und einer Hyperbel. Durch unsere Substitution erhält man nämlich an Stelle der kubischen Gleichung die zwei Kegelschnittgleichungen:

$$\text{und} \begin{cases} x^2 = y \text{ (Parabel)} \\ xy + ay + bx + c = 0 \text{ (Hyperbel)} \end{cases}$$

und an Stelle der biquadratischen:

$$\text{und} \begin{cases} x^2 = y \text{ (Parabel)} \\ y^2 + axy + by + cx + d = 0 \text{ (Hyperbel).} \end{cases}$$

Eine von der soeben auseinandergesetzten allgemeinen Methode etwas abweichende, hübsche und einfache geometrische

Lösung unseres Problems der Dreiteilung des Winkels ist die folgende, bei welcher die Konstruktion einer einzigen Hyperbel in Verbindung mit einem Kreis nötig wird.

α sei der gegebene Winkel, in welchem mit beliebigem Radius $AO = AB$ ein Kreisbogen beschrieben wird. Es gilt einen Punkt C zu finden, der den Bogen OB im Verhältnis 2 : 1 teilt. Nennt man die Koordinaten dieses Punktes in dem durch O als Nullpunkt, die Sehne OB als Abscissenaxe eingeführten rechtwinkligen Koordinatensystem x und y, so erhält man:

$$y = x \operatorname{tg} \varphi = (d - x) \operatorname{tg} 2\varphi.$$

d bedeutet die Sehnenlänge OB, φ den Winkel BOC. Durch Elimination von φ bekommt man die Hyperbelgleichung

$$y^2 = 3x^2 - 2dx.$$

Der Mittelpunkt dieser Hyperbel liegt auf der Sehne und hat die Abszisse $\frac{d}{3}$; die Hyperbel geht durch O und hat die Halbaxen $\frac{d}{3}$ und $\frac{d}{\sqrt{3}}$, B ist der eine Brennpunkt. Da die Konstanten der Hyperbel nur von der Sehnenlänge d abhängen, so erkennt man leicht, daß man mittelst einer einzigen Hyperbel alle möglichen Winkel trisezieren kann.[1]

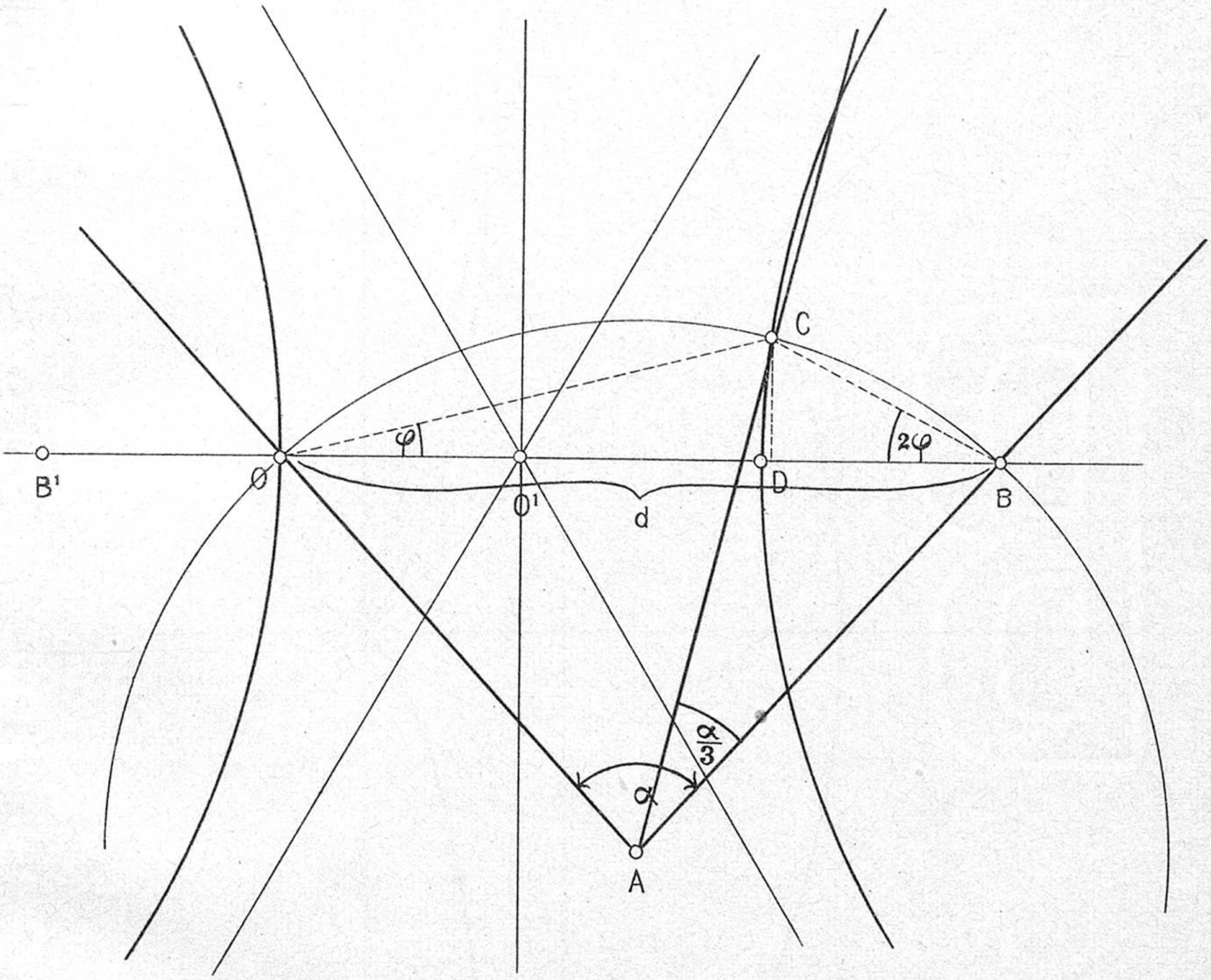
Außer den Kegelschnitten benutzten die griechischen Mathematiker zur Lösung der oben erwähnten Probleme auch höhere Kurven, welche gerade zu diesem Zwecke konstruiert und studiert wurden. Die *Quadratrix* ist bereits genannt worden; neben sie traten noch als besonders wichtig *Zissoide* und *Konchoide*, jene beim *Delischen Problem*, der *Verdoppelung des Würfels*, diese bei der *Dreiteilung des Winkels*.[2]

Zum Zwecke der praktischen Ausführung dieser Konstruktionen bedurfte man natürlich Apparate, welche diese höhern Kurven in einem Zuge lieferten; denn eine punktweise Konstruktion ist nur eine Näherungsmethode. Solche Apparate sind in alter und neuer Zeit vielfach verfertigt worden. Schon *Nikomedes*, der Erfinder der *Konchoide*, erfand eine einfache Vorrichtung — es ist die älteste derartige neben Lineal und Zirkel —, mit der sich eine Konchoide zeichnen läßt.[3]

---

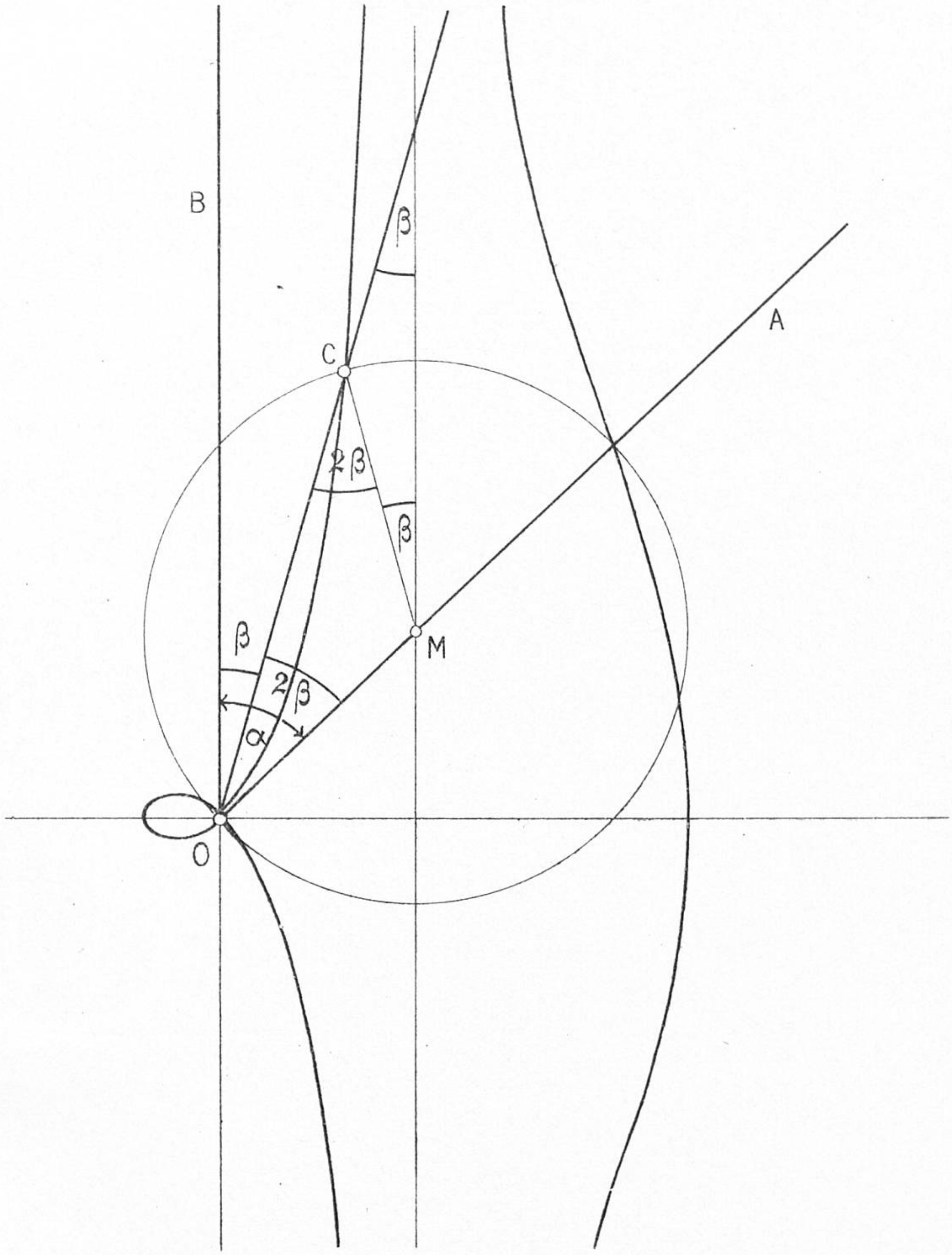
[1] Siehe Figur *a*.
[2] Siehe Figur *b*.
[3] Siehe *Moritz Cantor*, l. c., sowie *F. Klein*, l. c.

Fig. a.



Dreiteilung eines Winkels mit Hilfe einer Hyperbel.

Fig. b.



Dreiteilung eines Winkels mit Hilfe einer Conchoide.

Damit haben wir die Hauptlösungen unseres Problems der Trisektion in aller Kürze gekennzeichnet. Auf alles einzelne einzutreten, hat hier keinen Wert. Wer sich für einzelne, spezielle Lösungen interessiert, findet eine ziemlich vollständige Zusammenstellung der überaus reichhaltigen Literatur über Dreiteilung des Winkels im Januar- und Oktoberheft der von *Dr. Wölffing,* Professor an der technischen Hochschule in Stuttgart herausgegebenen *„Mathematisch-naturwissenschaftlichen Mitteilungen" des Jahrgangs 1900.* Ich erfülle nur eine angenehme Pflicht, wenn ich an dieser Stelle Herrn Prof. Wölffing meinen verbindlichen Dank ausspreche für freundliche Zusendung der beiden Hefte der erwähnten Mitteilungen, sowie eines Manuskriptes mit über 70 weitern Literaturangaben.

Im folgenden bringen wir eine von einem Schüler der obersten Gymnasialklasse unserer Kantonsschule herrührende Näherungslösung des Problems, mit Hilfe von Lineal und Zirkel allein durchführbar. Sie muß in doppelter Hinsicht einiges Interesse erwecken: die zur Lösung erforderliche Konstruktion ist verblüffend einfach, und die Hauptsache, das Resultat weist selbst für große Winkel nur verschwindend kleine Fehler auf. Den Pädagogen interessiert gewiß auch die Entstehungsgeschichte, die ich deshalb nicht vorenthalten wollte.

Eine Näherungslösung mit Zirkel und Lineal.

Von Otto Böhi.

Meine Absicht war, den Winkelbogen (siehe Fig. 1) so auf die Tangente in der Mitte des Bogens abzutragen, daß durch Dreiteilung derselben und Verbindung der Teilpunkte mit dem Scheitel des Winkels möglichst angenäherte Dreiteilung des Winkels hervorgerufen würde. Zu diesem Zwecke zog ich Winkelhalbierende und Sehne des Bogens und trug die Höhe des durch die Sehne herausgeschnittenen Segmentes auf der Winkelhalbierenden, welche zur Symmetrieaxe der ganzen Figur wird, nach außen ab: $ED = EF$. Sodann beschrieb ich mit dem Radius FB die Bogen BG und CH. Teilt man nun die Strecke GH in drei gleiche Teile und verbindet die Teilpunkte mit dem Scheitel A, so wird der mittlere Winkelteil zu groß. Durch Versuche stellte ich aber fest, daß man ein ziemlich gutes Resultat erhält, wenn man nur $^1/_3\,ED$, also $EJ = EL$ nach außen abträgt und im übrigen genau so verfährt wie eben angegeben.

Dieses Verfahren ließ sich aber nicht für Winkel über 90^0 in Anwendung bringen, da sich bei solchen erhebliche Fehler merkbar machten.

Bei Betrachtung der Figur schienen mir die Lote, die ich von O, dem Schnittpunkt von LB mit dem Bogen, und seinem symmetrischen Punkte aus auf die Sehne fällte, diese in drei nahezu gleiche Teile zu teilen. Ein Versuch bestätigte meine Vermutung. Dadurch wurde ich dazu geführt, den Punkt L durch einen andern Punkt zu ersetzen, den ich auf folgende Art erhalte. Statt der Höhe teile ich die Sehne selber in drei gleiche Teile, errichte in den Teilpunkten die Lote, bringe diese Lote mit dem Kreise zum Schnitt und verbinde die Schnittpunkte mit den Endpunkten der Sehne. Der Schnitt mit der Winkelhalbierenden ist der neue Punkt L, der in Fig. 2, wo diese Konstruktion ausgeführt worden ist, H genannt wird. Von hier aus ist die weitere Konstruktion die oben angegebene.

Zur Berechnung des bei dieser Näherungskonstruktion begangenen Fehlers gelangt man leicht auf analytischem Wege. Benutzt man die Bezeichnungen:

$$AB = r; \sphericalangle BAE = \frac{1}{2} \sphericalangle BAC = \varphi;$$

$$\sphericalangle OAE = \frac{1}{2} \sphericalangle OAP = \omega,$$

so erhält man:

$$BD = r \sin\varphi; \quad AD = r\cos\varphi; \quad DE = r(1 - \cos\varphi)$$

und durch Aufstellung der Kreisgleichung:

$$FG = \frac{r}{3}\left(\sqrt{9 - \sin^2\varphi} - 3\cos\varphi\right). \quad \text{Daraus}$$

$$DH = \frac{r}{2}\left(\sqrt{9 - \sin^2\varphi} - 3\cos\varphi\right)$$

$$\overline{BH}^2 = \overline{JH}^2 = \frac{3r^2}{4}\left(4 + 2\cos\varphi\left[\cos\varphi - \sqrt{9 - \sin^2\varphi}\right]\right)$$

$$\overline{EJ}^2 = r^2(1 - \cos\varphi)\left(\sqrt{9 - \sin^2\varphi} - \cos\varphi\right)$$

$$EL = \frac{r}{3}\sqrt{(1 - \cos\varphi)\left(\sqrt{9 - \sin^2\varphi} - \cos\varphi\right)}$$

Fig.1.

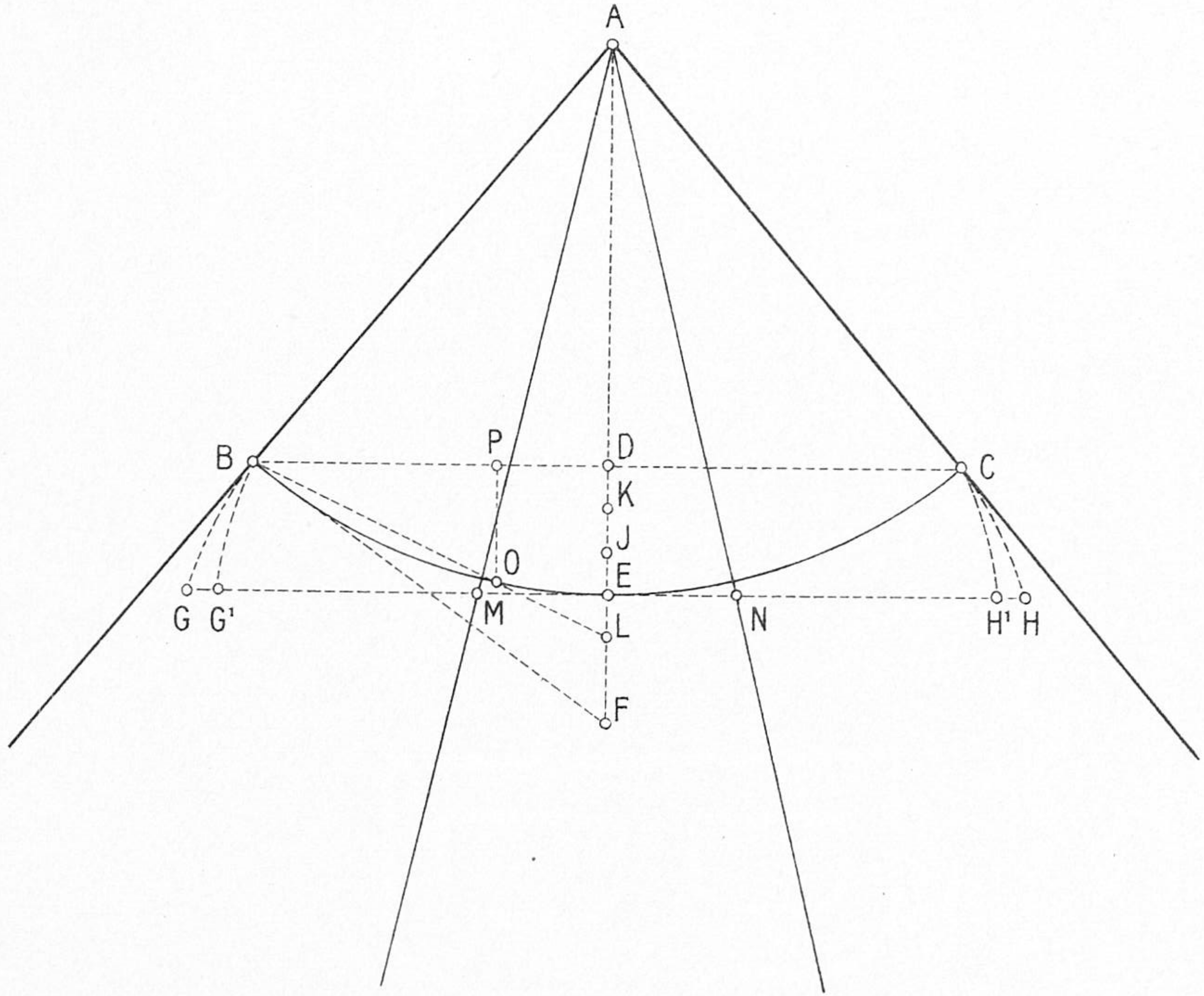
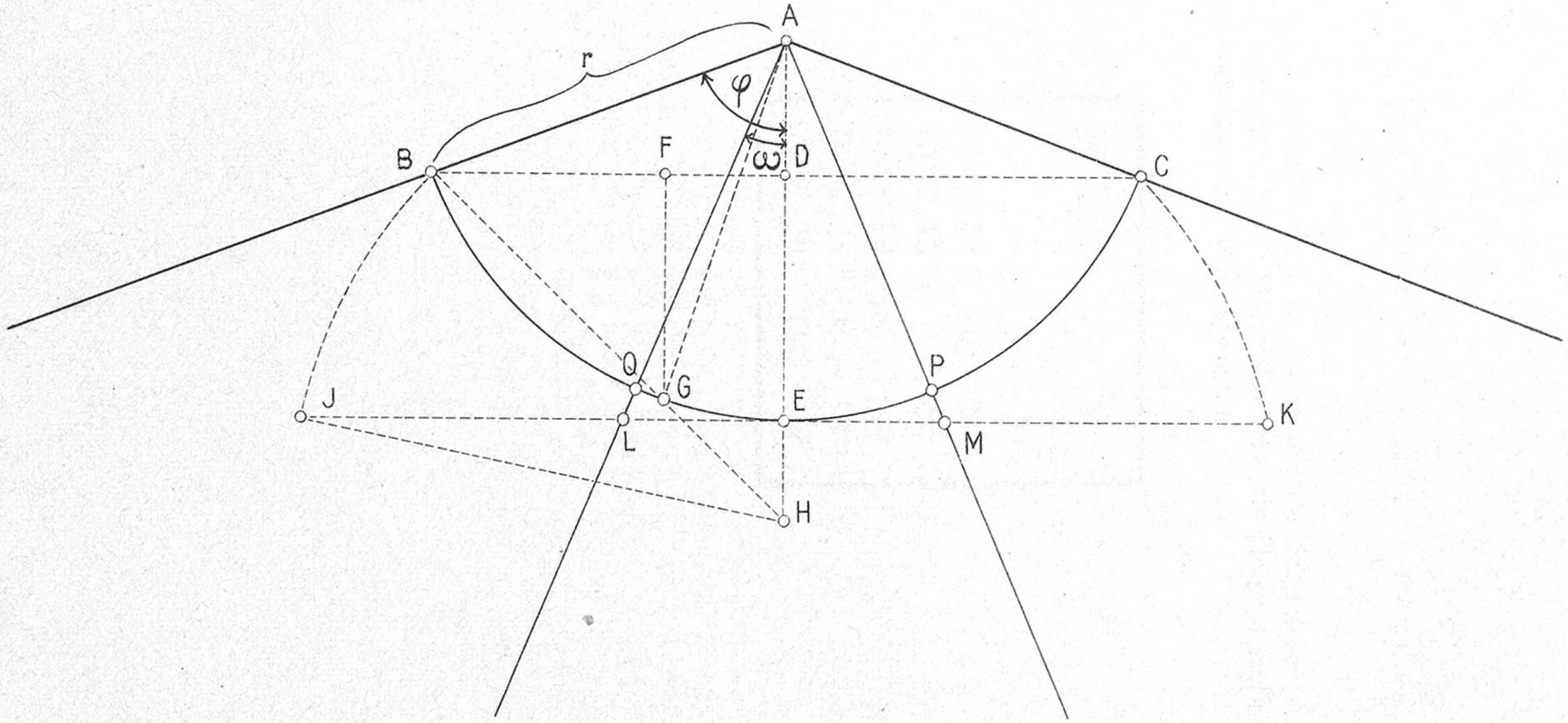


Fig.2.



und endlich:

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{1}{3} \sqrt{(1 - \cos \varphi) (\sqrt{9 - \sin^2 \varphi} - \cos \varphi)}.$$

Auf Grund dieser Formel ist das folgende Täfelchen berechnet, aus dem man die Fehlergröße erkennt für eine Reihe von aufeinanderfolgenden Winkelwerten.

φ	ω		
15°	5°	0′	7″
30°	10°	0′	28″
45°	15°	0′	25″
60°	19°	57′	8′
75°	24°	45′	19″
90°	29°	16′	29″