

# Ueber Durchschnittskurven von Flächen zweiten Grades : einige typische Formen der Kurven mit unpaaren Aesten

Autor(en): **Stiner, G.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Programm / Technikum des Kantons Zürich in Winterthur**

Band (Jahr): **28 (1901-1902)**

PDF erstellt am: **16.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-1047765>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Ueber Durchschnittskurven von Flächen zweiten Grades:

Einige typische Formen der Kurven mit unpaaren Aesten.

—  
Mit 6 Tafeln.  
—

Von Prof. Dr. G. STINER.

Beilage zum Programm des Technikums des Kantons Zürich  
in Winterthur

für das Schuljahr 1902/1903.

Winterthur  
Buchdruckerei von Geschwister Ziegler  
1902.



Im Folgenden sind einige typische Formen derjenigen Raumkurven vierter Ordnung erster Art konstruiert, durch welche keine reellen Kegelflächen gehen.<sup>1)</sup> Dazu wurde nachstehende Methode verwendet:  $S_1$  sei eine hyperbolische Fläche 2. Grades,  $A B A_1 B_1$  die Ecken eines auf ihr liegenden windschiefen Vierseits mit den Gegenkanten  $A A_1 = p$  und  $B B_1 = g$ . Auf  $p$  und  $g$  ist dann je ein zweites Punktepaar  $C C_1$  und  $D D_1$  gewählt, so dass die Paare  $A A_1$  und  $C C_1$ , sowie  $B B_1$  und  $D D_1$  einander trennen. Die 4 Punkte  $C D C_1 D_1$  sind dann als die Ecken eines windschiefen Vierseits einer zweiten Fläche  $S_2$  angenommen, die durch eine weitere Bedingung eindeutig bestimmt wird. Die Geraden beider Flächen wurden dabei so bezeichnet:

$$\begin{aligned} A B = a, A_1 B_1 = a_1; & \quad A_1 B = b, A B_1 = b_1; \\ C D = c, C_1 D_1 = c_1; & \quad C_1 D = d, C D_1 = d_1. \end{aligned}$$

$S_1$  und  $S_2$  sind so einfach wie möglich gewählt; zur Verwendung kommen bloss das gleichseitige Rotationshyperboloid und das hyperbolische Paraboloid in den einfachsten Lagen gegenüber dem Projektionssystem. Hierbei zeigt sich, dass man bei dem Streben nach möglichst bequemen Dispositionen auf Vierschlussflächen des Büschels geführt wird. Doch soll hier auf die Schliessungsprobleme nicht näher eingetreten werden; ich beschränke mich im wesentlichen auf die Konstruktion von Punkten, Tangenten und Schmiegungebenen der Durchschnittskurve von  $S_1$  und  $S_2$ .

Die Tafeln sind nach meinen Zeichnungen auf photographischem Wege hergestellt; die Schrift wurde durch die Topographische Anstalt Winterthur besorgt.

## Allgemeines.

1. Die Durchschnittskurve  $R_4$  von  $S_1$  und  $S_2$  besteht im vorliegenden Fall aus 2 Aesten, von denen jeder von einer beliebigen Ebene in einem Punkt oder in 3 Punkten geschnitten wird. Daraus ergeben sich einige Hauptmerkmale der Projektionen dieser Kurven:

- a) Jede Projektion von  $R_4$  hat zwei reelle Doppelpunkte. Der eine ist immer ein Knotenpunkt, hervorgehend aus einem scheinbaren Durchschnitt beider Kurvenäste; der andere ist entweder auch ein Knotenpunkt, hervorgehend aus einem scheinbaren

---

<sup>1)</sup> In der Litteratur finde ich sehr wenige Anhaltspunkte für die vorliegende Arbeit. Bekannt sind mir nur: 1. eine Figur von Ch. Wiener in seinem Lehrbuch der darstellenden Geometrie, Bd. II, pag. 306, 2. das schöne Fadenmodell von H. Wiener aus dem Verlag von L. Brill in Darmstadt, 3. einige Bemerkungen in den Lehrbüchern der darstellenden Geometrie von Fiedler (Bd. III) und Rohn und Papperitz (Bd. II), 4. die 20. Figur in der Arbeit von W. Binder: „Ueber Plankurven vierter Ordnung vom Geschlechte  $p = 1$  und ihre typischen Formen“ im 28. Jahresbericht der niederösterreichischen Landesoberrealschule und Fachschule für Maschinenwesen in Wiener-Neustadt, 1893.

Durchschnitt des nämlichen Astes (Schleife), oder ein Rückkehrpunkt oder ein isolierter Doppelpunkt.

- b) Jede Tangente an eine Projektion von  $R_4$  trifft dieselbe ausser im Berührungspunkt in 2 weitem Punkten, die stets reell sind.  
 c) Die Doppeltangenten der Projektionen von  $R_4$  sind imaginär.

Hauptsächlich infolge der Eigenschaften a) und c) ist die Mannigfaltigkeit der Formen der Projektionen von  $R_4$  nicht gross.

**2.** Die Schnittkurve 8. Ordnung der abwickelbaren Tangentenfläche von  $R_4$  mit einer beliebigen Ebene besteht aus 2 Aesten. Die Kurve hat 4 Rückkehrpunkte in den Schnittpunkten von  $R_4$  mit der Querschnittebene, von denen der eine auf dem einen Ast liegt, während die 3 übrigen dem andern Ast angehören; mindestens 2 dieser Punkte sind reell. Ferner besitzt die Schnittkurve 16 nicht reelle Doppelpunkte zu je vierten auf den Schnittlinien der gedachten Ebene mit den Flächen des gemeinsamen Polartetraeders von  $S_1$  und  $S_2$ . Die Zahl der Wendepunkte der Kurve ist  $3 \cdot 8 \cdot 6 - 8 \cdot 4 - 6 \cdot 16 = 16$ ; sie sind die Schnittpunkte der Ebene mit den Tangenten in den Scheiteln der Kurve  $R_4$ , also auch sämtliche imaginär.

## Tafel I.

**3.**  $S_1$  ist ein gleichseitiges Rotationshyperboloid, dessen Axe  $x$  auf der 3. Projektionsebene senkrecht steht. Die Gerade  $p$  sei der zur 1. Projektionsebene senkrechte Durchmesser  $z$  der Fläche mit den Schnittpunkten  $A$  und  $A_1$ . Dann ist  $g$  die unendlich ferne Gerade der 1. Projektionsebene; ihre Schnittpunkte mit  $S_1$  sind  $B_\infty$  und  $B_{1\infty}$ .

Für  $S_2$  sei  $C$  der Mittelpunkt der Strecke  $AA_1$ ,  $C_1$  der unendlich ferne Punkt von  $p$  und  $D_\infty$  und  $D_{1\infty}$  die Richtungen der Winkelhalbierenden zu den Richtungen von  $B_\infty$  und  $B_{1\infty}$ . Zur eindeutigen Bestimmung des hyperbolischen Paraboloides  $S_2$  ist noch die Gerade  $e_2$  angenommen, parallel zur 2. Projektionsebene und gegen die 1. Projektionsebene um  $45^\circ$  geneigt. Aus ihr ergeben sich noch die weitem Geraden  $e_3$ ,  $d_2$  und  $d_3$  von  $S_2$ . Jede Ebene parallel zur 2. Projektionsebene enthält ausser  $d_\infty$  eine Gerade  $c$  und jede Parallelebene zur 3. Projektionsebene enthält ausser  $c_{1\infty}$  eine Gerade  $d$  von  $S_2$ .

**4.** Die Punkte  $P$  der Durchschnittskurve  $R_4$  ergeben sich auf Hülfebenen  $H$ , welche zur 3. Projektionsebene parallel sind. Jede solche Ebene enthält von  $S_1$  einen Kreis, dessen Radius gleich der Entfernung zwischen dem Schnittpunkt von  $H$  mit der Rotationsaxe und dem Punkt  $A$  ist; von  $S_2$  eine Gerade  $d$ , welche als Verbindungslinie der Schnittpunkte von  $e_2$  und  $e_3$  mit  $H$  zu konstruieren ist. Jede Hülfebene liefert also 2 reelle Punkte von  $R_4$ ; die beiden andern Punkte sind die imaginären Kreispunkte auf  $c_{1\infty}$ . Auf Tafel I ist die Konstruktion für 2 symmetrisch zum Mittelpunkt von  $S_1$  liegende Hülfebenen durchgeführt. Dabei sind, wie in den spätern Figuren, die Punkte des einen Astes mit ungeraden und die Punkte des andern Astes mit geraden Ziffern bezeichnet. Für die 1. Projektion von  $R_4$  sind die Punkte  $D'_\infty$  und  $D'_{1\infty}$  Doppelpunkte, herrührend von den Geraden  $c_{1\infty}$  und  $d_\infty$ ; für die 2. Projektion sind  $C''$  und  $C''_{1\infty}$  Doppelpunkte, entstehend aus den Geraden  $c_{1\infty}$  und  $d_1$ ;

für die 3. Projektion endlich sind  $C'''$  und  $C_{1\infty}'''$  Doppelpunkte, welche hervorgehen aus den Geraden  $c$  und  $d_\infty$  der Fläche  $S_2$ .<sup>2)</sup>

Die 4 reellen Kurvenpunkte 1 2 4 3, welche auf 2 symmetrisch zum Mittelpunkt von  $S_1$  liegenden Hülfebenen erhalten werden, bilden die Ecken eines auf  $S_2$  liegenden windschiefen Vierseits;  $S_2$  ist also eine Vierschlussfläche des Büschels. Diese Eigenschaft besitzt aber auch  $S_1$ , weil die Schnittpunkte der Geraden  $d_\infty$  und  $d_1$  mit  $S_1$  die Ecken eines auf  $S_1$  liegenden windschiefen Vierseits bilden. Für jede der 3 Projektionen von  $R_4$  ergibt sich daraus einerseits eine Erzeugung aus 2 projektiven Tangenteninvolutionen auf dem Umrisskegelschnitt und andererseits eine Erzeugung aus 2 projektiven Strahleninvolutionen.<sup>3)</sup>

Alle Geraden  $d$  von  $S_2$  treffen  $R_4$  in zwei reellen Punkten. Unter den Geraden  $c$  gibt es 4 Tangenten an die Kurve. Zwei derselben sind die Geraden  $c_2$  und  $c_3$ , welche die Fläche  $S_1$  im Unendlichen berühren; die beiden andern,  $c_4$  und  $c_5$ , liegen in den Tangentialebenen an  $S_1$  in den Schnittpunkten mit  $d_1$ , ihre ersten Projektionen fallen zusammen mit den Scheiteltangenten der Umrisshyperbel.

**5.** Die Tangente in einem Punkt  $P$  an  $R_4$  wird erhalten als Schnittlinie der Tangentialebenen in diesem Punkt an  $S_1$  und  $S_2$ . Es ist zweckmässig, die Spuren dieser Ebenen zu bestimmen auf einer durch den Mittelpunkt von  $S_1$  gehenden Hülfeebene  $E$ , die zu einer Projektionsebene parallel ist. In Tafel I ist die Konstruktion ausgeführt auf der Parallelebene zur 1. Projektionsebene; die ebenso bequeme Konstruktion auf der Parallelebene zur 3. Projektionsebene soll bloss beschrieben werden.

Die Tangentialebene in  $P$  an  $S_1$  wird bestimmt durch die Geraden  $a$  und  $b$  der Fläche, welche durch diesen Punkt gehen. Diese Geraden schneiden  $E$  in 2 Punkten, deren Projektionen die Berührungspunkte von  $a'$  und  $b'$  mit der Umrisshyperbel der 1. Projektion sind. Die gesuchte Spur  $s$  der Tangentialebene in  $P$  an  $S_1$  ist also die Polare des Punktes  $P'$  in Bezug auf die Umrisshyperbel. Die Geraden  $c$  und  $d$  von  $S_2$  durch  $P$  stützen sich auf die beiden Geraden  $CD_\infty$  und  $CD_{1\infty}$  von  $S_2$  in der Ebene  $E$ ; diese Stützpunkte sind zugleich die Durchstosspunkte von  $c$  und  $d$  mit  $E$ . Die Spur  $t$  der Tangentialebene in  $P$  an  $S_2$  ist also die Verbindungslinie der Fusspunkte der Lote aus  $P'$  auf die Axen der Umrisshyperbel von  $S_1$ . Der Schnittpunkt  $F$  von  $s$  und  $t$  ist der Durchstosspunkt der Tangente in  $P$  an  $R_4$  mit  $E$ . Aus der entwickelten Konstruktion folgt, dass die Geraden  $s$  und  $t$  einander in  $F$  rechtwinklig schneiden.

**6.** Der Ort von  $F$  ist die Schnittkurve von  $E$  mit der abwickelbaren Tangentenfläche von  $R_4$ . Dieser Ort ist eine Kurve 8. Ordnung  $C_8$ , für welche die imaginären Kreispunkte der Ebene  $E$  vierfache Punkte sind. Ausserdem besitzt  $C_8$  4 Doppelpunkte, welche paarweise auf den Strahlen aus  $p'$  nach jenen imaginären Kreispunkten liegen und 4 Rück-

<sup>2)</sup> Es ist lehrreich, hier, wie auch bei den folgenden Beispielen, die Formveränderungen der Projektionen von  $R_4$  zu untersuchen bei veränderlichen Projektionsebenen; besonders beachtenswert sind hier die verschiedenen Formen der 1. Projektion bei Festhaltung der angenommenen 2. Projektionsebene.

<sup>3)</sup> Man vergl. dazu Fiedler, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, III. Aufl., Band III § 55.

kehrpunkte, welche sich paarweise auf den Geraden  $x$  und  $y$ , den Axen der Umrisshyperbel, befinden; das erste Paar imaginär, das zweite reell. Aus der in 5. erwähnten Eigenschaft, dass die Geraden  $s$  und  $t$  einander in  $F$  rechtwinklig schneiden, ergibt sich eine Konstruktion der Tangente im Punkt  $F$  an die Spurkurve  $C_8$  und damit eine Konstruktion der Schmiegungebene in  $P$  an die Raumkurve  $R_4$ .  $C_8$  ist der Ort des Scheitels  $F$  eines rechten Winkels, der sich so bewegt, dass seine Schenkel  $s$  und  $t$  fortwährend 2 feste Kurven  $\Sigma_s$  und  $\Sigma_t$  berühren, nämlich die Enveloppen der Linien  $s$  und  $t$ . Ist also  $S$  der Berührungspunkt von  $s$  an  $\Sigma_s$  und  $T$  der Berührungspunkt von  $t$  an  $\Sigma_t$ , so schneidet die Senkrechte in  $S$  auf  $s$  diejenige in  $T$  auf  $t$  im augenblicklichen Drehungszentrum  $M$  und die Verbindungslinie  $MF$  ist die Normale in  $F$  an  $C_8$ , oder: Die Tangente in  $F$  an  $C_8$  ist die Tangente in  $F$  an den Kreis, welcher durch  $S$ ,  $T$  und  $F$  geht. Namentlich die letztere Konstruktion lässt sich bequem projektivisch verallgemeinern für den Schnitt jeder Tangentenfläche mit einer beliebigen durch eine der Gegenkanten  $p$  oder  $q$  gehenden Ebene.

7. Die Kurven  $\Sigma$  sind noch zu untersuchen und die Konstruktion der Punkte  $S$  und  $T$  zu ermitteln.

Die Tangentialebenen in den Punkten  $P$  von  $R_4$  an eine der beiden Flächen  $S_i$  bilden die der Fläche nach  $R_4$  umschriebene Developpable, welche  $R_4$  in Bezug auf die betreffende Fläche zweiten Grades polarreziprok entspricht; sie ist also eine Fläche 4. Klasse, welche von jeder Ebene in einer Kurve 4. Klasse mit 2 Doppeltangenten geschnitten wird. Die Kurven  $\Sigma$  entsprechen also nach dem Prinzip der Dualität den Projektionen von  $R_4$ . Sie sind zweiteilig, derart, dass aus einem beliebigen Punkt der Ebene an den einen Teil eine Tangente geht, während an den andern deren 3 gezogen werden können. In Tafel I ist die Kurve  $\Sigma_i$  gezeichnet.

Nun ist der Berührungspunkt  $S$  der Tangente  $s$  an  $\Sigma_s$  der Durchstosspunkt derjenigen Mantellinie der Developpablen längs des Hyperboloides  $S_1$ , welche in der Tangentialebene mit der Spur  $s$  liegt. Diese Mantellinie ist aber die polarreziproke Gerade rücksichtlich  $S_1$  zur Tangente in  $P$  an  $R_4$ ; sie liegt also zu dieser Tangente harmonisch in Bezug auf die durch  $P$  gehenden Geraden  $a$  und  $b$  des Hyperboloides. Folglich ist  $S$  der vierte harmonische Punkt zu  $F$  in Bezug auf die Schnittpunkte von  $s$  mit der Umrisshyperbel. Aus den entsprechenden Gründen ist  $T$  der vierte harmonische Punkt zu  $F$  in Bezug auf die Schnittpunkte von  $t$  mit den Geraden  $c'$  und  $d_1'$ , d. h. den Axen der Umrisshyperbel.

8. Für die Konstruktion der Tangente in  $P$  an  $R_4$  mit der Ebene  $yz$  als Hülfebene sei noch folgendes bemerkt: Die Spur  $s^*$  der Tangentialebene in  $P$  an  $S_1$  ist die Polare des Punktes  $P'''$  in Bezug auf den Umrisskreis von  $S_1$ . Die Spur  $t^*$  der Tangentialebene in  $P$  an  $S_2$  ist die Parallele zum Durchmesser  $d'''$  des Punktes  $P'''$  durch den Fusspunkt der Senkrechten aus  $P'''$  auf die Gerade  $y = d_1'''$ ; denn die Gerade  $d$  des Punktes  $P$  ist der Hülfebene parallel und die Gerade  $c$  des Punktes  $P$  projiziert sich in die Senkrechte aus  $P'''$  auf  $d_1'''$  und ihr Durchstosspunkt mit der Hülfebene liegt auf  $d_1$ . Der Berührungspunkt  $S^*$  von  $s^*$  mit der Enveloppe ist der vierte harmonische Punkt zu  $F^*$  in Bezug auf die Schnittpunkte

von  $s^*$  mit dem Umrisskreis. Der Berührungspunkt  $T^*$  liegt symmetrisch zu  $F^*$  in Bezug auf die Gerade  $y$ , woraus ein einfacher Zusammenhang zwischen der Spurkurve  $C_8^*$  und der Enveloppe  $\Sigma_t^*$  folgt.

Die Spurkurve  $C_8^*$  besitzt vierfache Punkte in den Doppelpunkten der Involution  $A A_1, C C_1$  auf  $p$  und Rückkehrpunkte in den imaginären Kreispunkten. Weil auch hier  $s^*$  und  $t^*$  zu einander senkrecht stehen, so kann die Tangente in  $F^*$  nach kinematischer Methode konstruiert werden. Andererseits findet man sie auch nach 6. als Tangente in  $F^*$  an denjenigen Kegelschnitt, welcher durch  $S^* T^*$  und  $F^*$  geht und die genannte Involution auf  $p$  zu seiner Involution harmonischer Pole hat.

9. In Tafel I ist noch der Schnitt  $Q_8'$  der Tangentenfläche mit einer beliebigen Parallelebene zur 1. Projektionsebene gezeichnet, indem direkt die Durchstosspunkte der Tangenten an  $R_4$  mit dieser Ebene konstruiert wurden.  $Q_8$  hat ebenfalls vierfache Punkte in den imaginären Kreispunkten; die Tangenten in entsprechenden Punkten  $F$  und  $Q$  der beiden Spurkurven sind zu einander parallel.

Die hier konstruierte Tangentenfläche von  $R_4$  eignet sich vorzüglich für eine Darstellung mit Niveaukurven parallel zur 1. oder 3. Projektionsebene. Und zwar können aus 2 solchen Kurven die übrigen in einfacher Weise abgeleitet werden. Ist z. B. die Ebene der Kurve  $Q_8$  von der Ebene der Kurve  $C_8$  um  $z$  Einheiten entfernt, so hat man nur die Strecke zwischen den Punkten  $F$  und  $Q'$  auf jeder Tangente in  $z$  gleiche Teile zu teilen, so liefern die  $z-1$  Teilpunkte Punkte für die Zwischenkurven und durch Fortsetzung der Teilung über  $F$  und  $Q'$  hinaus erhält man Punkte für die weiteren Kurven. Mit Hülfe der Niveaukurven kann die Fläche auch bequem modelliert werden.<sup>4)</sup>

10. Für die analytische Behandlung der Aufgabe sei folgendes bemerkt: Die Gleichungen der Flächen  $S_1$  und  $S_2$  sind

$$-x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0 \quad (1)$$

$$2xy - 2bz = 0 \quad (2)$$

Eine beliebige Fläche  $S$  des durch  $S_1$  und  $S_2$  bestimmten Büschels wird dargestellt durch

$$(-x^2 + y^2 + z^2 - a^2) - \lambda(2xy - 2bz) = 0 \quad (3)$$

Die Polarebene des Punktes  $Z_\infty$  in Bezug auf  $S$  hat die Gleichung

$$z + \lambda b = 0$$

Der Umriss von  $S$  bei einer Orthogonalprojektion auf die Ebene  $xy$  ist daher bestimmt durch

$$-x^2 + y^2 + \lambda^2 b^2 - a^2 - 2\lambda xy - 2\lambda^2 b^2 = 0$$

oder

$$\lambda^2 b^2 + 2\lambda xy + x^2 - y^2 + a^2 = 0 \quad (4)$$

<sup>4)</sup> Es ist interessant, die Schnitte der Tangentenfläche von  $R_4$  mit Parallelebenen zur 1. Projektionsebene zu vergleichen mit den Schnitten der Tangentenfläche, welche bei folgender Anordnung der Durchdringung entsteht:  $S_1$  und  $S_2$  sind 2 Kegelflächen, deren Leitkurven in der nämlichen Ebene  $E$  gleichseitige Hyperbeln mit demselben Mittelpunkt sind und deren Spitzen mit diesem Mittelpunkt in einer Geraden liegen. Auch hier sind die Schnittkurven der Tangentenfläche mit  $E$  und den dazu parallelen Ebenen Kurven 8. Ordnung mit vierfachen Punkten in den imaginären Kreispunkten. Jedoch sind diese Kurven einteilig und besitzen stets 4 reelle Wendepunkte auf den Paaren reeller Tangenten aus den Kegelspitzen an die Durchschnittskurve und 2 reelle Rückkehrpunkte. Zu diesen Kurven gehören auch die 2 reellen Doppelkurven der Tangentenfläche, welche Bernoullische Lemniskaten sind.



Bei veränderlichem  $\lambda$  stellt diese Gleichung eine Kegelschnittreihe vom Index 2 dar; jedes Exemplar der Reihe berührt die Projektion der Durchdringungskurve von  $S_1$  und  $S_2$  auf  $xy$  in 4 Punkten, welche unpaar auf die beiden Aeste verteilt sind. Die Gleichung dieser Projektion lautet:

$$x^2 y^2 - b^2 (x^2 - y^2 + a^2) = 0.$$

In gleicher Weise ergeben sich die Gleichungen der Projektionen von  $R_4$  auf die Ebenen  $xz$  und  $yz$ ; sie sind:

$$x^2 (x^2 - z^2 + a^2) - b^2 z^2 = 0$$

und 
$$y^2 (y^2 + z^2 - a^2) - b^2 z^2 = 0.$$

Stellt die Gleichung (4) für einen bestimmten Wert des Parameters  $\lambda$  ein Linienpaar dar, so ist die diesem Parameterwert entsprechende Fläche des Büschels ein Kegel. Zur Bestimmung der Parameter der 4 Kegel des Büschels erhält man somit die Gleichung

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + \lambda^2 b^2 \end{vmatrix} = 0$$

oder 
$$(a^2 + \lambda^2 b^2) (1 + \lambda^2) = 0,$$

woraus folgt, dass alle 4 Kegel des Büschels nicht reell sind.

## Tafel II.

**11.**  $S_1$  ist ein gleichseitiges Rotationshyperboloid mit zur 1. Projektionsebene senkrechter Axe  $z$ . Auf diesem ist das windschiefe Vierseit  $AB A_1 B_1$  so gewählt, dass dessen 1. Projektion das dem Umrisskreis umschriebene Quadrat ist, dessen Seiten zur 2. resp. 3. Projektionsebene, d. h. zu den Axen  $x$  und  $y$ , parallel sind.

$S_2$  enthält das windschiefe Vierseit  $CDC_1 D_1$ , wo  $C'$  und  $D'$  die Mittelpunkte der Radien nach  $A'$  und  $B_1'$  und  $C_1$  und  $D_1$  die unendlich fernen Punkte von  $p$  und  $g$  sind. Setzt man noch fest, dass  $Z_\infty$  auf  $S_2$  liegen soll, so ist die Fläche eindeutig bestimmt. Auf  $S_2$  liegen noch die ausgezeichneten Geraden  $c_2, c_4, c_3$  und  $c_5$ , deren Konstruktion aus der Figur leicht ersichtlich ist; sie sind Tangenten von  $R_4$  und zwar  $c_3$  und  $c_5$  mit unendlich fernen Berührungspunkten. Weil  $c_2$  durch  $Z_\infty$  geht, so muss die 1. Projektion von  $R_4$  eine Kurve mit Rückkehrpunkt sein.

**12.** Da  $C_1 D_1 = c_1$  die unendlich ferne Gerade der 1. Projektionsebene ist, so schneidet jede Parallelebene zur 1. Projektionsebene  $S_2$  noch in einer Geraden  $d$ . Diese Ebenen werden daher zweckmässig als Hülfebenen für die Konstruktion der Punkte  $P$  von  $R_4$  verwendet: man schneidet jede Gerade  $d$  mit dem Kreis von  $S_1$ , welcher in der nämlichen Hülfebene liegt. Jede Hülfebene liefert also ausser den unendlich fernen Kreispunkten 2 reelle Punkte von  $R_4$ , einen für jeden Ast. In der Figur sind ausser den 3 ausgezeichneten Hülfebenen durch  $d, d_1$  und  $d_2$  2 weitere durch  $d_3$  und  $d_5$  gewählt, welche symmetrisch zum Mittelpunkt von  $S_1$  liegen und die vierten harmonischen zu ihnen durch  $d_4$  und  $d_6$  in Bezug auf die durch  $p$  und  $g$  gehenden Hülfebenen.

Die 4 Kurvenpunkte, welche auf 2 symmetrischen Hülfebenen liegen, bilden die Ecken eines windschiefen Vierseits, welches auf  $S_2$  liegt. Die 4 Punkte auf 2 harmonischen

Hilfsebenen sind die Ecken eines Vierecks, von welchem 2 Gegenseiten auf  $S_2$  liegen und 2 andere Gegenseiten sich auf die Geraden  $p$  und  $g$  stützen, also jener ausgezeichneten Fläche 4. Ordnung angehören, welche gebildet wird durch die Bisekanten von  $R_4$ , welche  $p$  und  $g$  schneiden. Das letztere wird am einfachsten dadurch bewiesen, dass man die Kurve  $R_4$  auf eine neue 2. Ebene projiziert, welche senkrecht zu  $p$  steht. Dann wird die geschaarte Involution von  $R_4$  rücksichtlich der Axen  $p$  und  $g$  als zentrische Involution der Projektion mit dem Punkt  $p''$  als Zentrum und der Geraden  $g''$  als Axe projiziert. Entsprechende Punkte der Involution liegen daher auf Parallelen zu  $g''$ , welche durch  $p''$  und  $g''$  harmonisch getrennt werden.

**13.** Erwähnt sei noch eine Konstruktion der 1. Projektion von  $R_4$ , welche sich ergibt aus der Betrachtung der Projektion der Vierseite von  $S_2$ , welche  $R_4$  eingeschrieben sind. Sie lautet: Gegeben sei ein Kreis mit dem Mittelpunkt  $O$  und den Durchmesserendpunkten  $S$  und  $T$ ; zu  $OS$  errichte man das Mittellot, welches den Kreis in  $A$  und  $B$  schneidet. Von  $O$  und  $T$  aus bewegen sich 2 Punkte  $O'$  und  $T'$  in gleicher Richtung, der zweite mit der doppelten Geschwindigkeit des ersten. Um den Mittelpunkt  $O'$  zieht man den Kreis durch  $A$  und  $B$ , welcher den angenommenen Durchmesser in  $Y$  und  $Y_1$  schneidet und durch diese Punkte die Senkrechten  $y$  und  $y_1$  zum angenommenen Durchmesser. In  $T'$  errichtet man die Senkrechte zum Durchmesser und verbindet deren Schnittpunkte  $X$  und  $X_1$  mit dem gegebenen Kreis durch die Strahlen  $x$  und  $x_1$  mit  $S$ . Der Ort der Schnittpunkte der Strahlenpaare  $y y_1$  und  $x x_1$  ist die erste Projektion unserer  $R_4$ .

Durch Aenderung der Projektivität zwischen  $O'$  und  $T'$ , durch Aenderung der Punkte  $A$  und  $B$ , durch Ersetzen des Kreises durch einen andern Kegelschnitt oder durch Aenderung der Richtung von  $y$  und  $y_1$  können andere Formen der ebenen Kurve und damit wieder neue Formen von  $R_4$  gefunden werden. Folgende einfache Anordnungen führen auf interessante ebene Kurven 4. Ordnung mit unpaaren Aesten:

- a)  $A$  und  $B$  seien die Endpunkte des zu  $TS$  senkrechten Durchmessers des Kreises;  $O'$  und  $T'$  fallen immer zusammen.
- b)  $A$  und  $B$  liegen auf der Tangente in  $T$  an den Kreis in einer Entfernung von  $T$  gleich dem Radius des Kreises;  $O'$  und  $T'$  fallen immer zusammen.
- c)  $A$  und  $B$  wie in a), aber  $O'$  und  $T'$  symmetrisch zu  $O$ .
- d)  $A$  und  $B$  liegen auf der Tangente in  $S$  an den Kreis in einer Entfernung von  $S$  gleich dem Radius des Kreises;  $O'$  und  $T'$  fallen immer zusammen.
- e) An Stelle des Kreises tritt eine gleichseitige Hyperbel,  $S$  und  $T$  sind die Scheitel derselben.  $A$  und  $B$  liegen auf der Scheiteltangente in  $T$ , in einer Entfernung von  $T$  gleich der halben Axe der Hyperbel.  $O'$  und  $T'$  bewegen sich von  $T$  aus in gleicher Richtung,  $T'$  mit der doppelten Geschwindigkeit von  $O'$ .

Dabei sind die Strahlen  $y$  und  $y_1$  immer senkrecht zu  $ST$  zu nehmen.

**14.** Die Tangenten in den Punkten von  $R_4$  sind konstruiert mit Benützung der Spuren  $s$  und  $t$  der Tangentialebenen in der Parallelebene  $E$  zur 1. Projektionsebene durch die Gerade  $p$ .

Es ist zweckmässiger, diese Ebene zu benützen als die Mittelebene, weil man auf ihr nach 6. die Spur der Schmiegungebene bestimmen kann.

Die Tangentialebene in  $P$  an  $S_1$  ist bestimmt durch die Geraden  $a$  und  $b$  dieses Punktes; ihre Projektionen sind die Tangenten aus  $P'$  an den Umrisskreis und ihre Durchstosspunkte mit der Ebene  $E$  liegen auf dem in dieser Ebene enthaltenen Parallelkreis von  $S_1$ . Die Kurve  $\Sigma_s$  ist in der Figur punktiert. Einfacher gestaltet sich die Konstruktion der Kurve  $\Sigma_t$ : Die Gerade  $d$  des Punktes  $P$  ist zu  $E$  parallel, also eine Spurparallele der Tangentialebene in  $P$  an  $S_2$ . Die Gerade  $c$  durch  $P$  stützt sich auf die in  $E$  liegende Gerade  $d_1$ , der Stützpunkt ist ein Punkt von  $t$ . Diese Gerade wird also erhalten, wenn man durch den Schnittpunkt der Parallelen zur  $x$ -Axe durch  $P'$  mit  $d_1'$  eine Gerade zieht, welche mit der Verbindungslinie des Rückkehrpunktes von  $R_4'$  mit  $P'$  gleich gerichtet ist.  $d_1'$  ist eine Doppeltangente von  $\Sigma_t$ , die andere Doppeltangente ist die unendlich ferne Gerade. Der Zusammenhang der Geraden  $t$ , welche den 8 reellen Punkten einer Gruppe von 4 Hülfeebenen entsprechen, ist aus der Figur zu ersehen.

Der Berührungspunkt von  $s$  mit  $\Sigma_s$  ist der vierte harmonische Punkt zu  $F$  in Bezug auf die Schnittpunkte von  $s$  mit dem Kreis in der Ebene  $E$ ; der Berührungspunkt von  $t$  mit  $\Sigma_t$  liegt symmetrisch zu  $F$  in Bezug auf den Schnittpunkt von  $t$  mit der Doppeltangente  $d_1'$ .

Die Spurkurve  $C_8$  der Tangentenfläche von  $R_4$  hat vierfache Punkte in den Doppelpunkten der Involution auf  $p$ . Die Tangenten an diese Kurve werden konstruiert nach dem in 6. entwickelten Verfahren.

Einfach werden hier die Schnitte der Tangentenfläche mit den Ebenen  $zy$  und  $zx$ . Beide sind Schmiegungebenen von  $R_4$ , schneiden also die Tangentenfläche in 2 unendlich benachbarten Mantellinien und einer Kurve 6. Ordnung mit 8 imaginären Doppelpunkten und einem Rückkehrpunkt. Die Kurve in  $yz$  besteht aus einem Oval und einem kardioidenförmigen Ast; diejenige in  $xz$  besteht aus einem hyperbolischen Ast mit den Asymptoten  $x + z = 0$  und  $x + 2z = 0$ , und einem andern Ast, für welchen die  $z$ -Axe Asymptote und die unendlich ferne Gerade Rückkehrtangente ist.

**15.** Es sollen noch die wichtigsten Gleichungen aufgestellt werden. Die Gleichung von  $S_1$  ist

$$x^2 + y^2 - z^2 = a^2.$$

$S_2$  enthält die Schnittlinien folgender Ebenenpaare:

$$\begin{array}{ll} z - a = 0 & \text{und} & y = -x - a \\ z + a = 0 & & y = x - a \\ z - a = 0 & & z + a = 0 \\ y = -x - a & & y = x - a \end{array}$$

Also muss die Gleichung von  $S_2$  die Form haben

$$(z - a)(x - y - a) - a(z + a)(x + y + a) = 0.$$

Beachtet man, dass auf  $S_2$  der Punkt mit den Koordinaten  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  liegt, so folgt  $a = 1$  und daraus die Gleichung von  $S_2$

$$yz + a(x + z) = 0.$$

Die Gleichungen der Projektionen von  $R_4$  lauten:

1. Projektion:  $(x^2 + y^2 - a^2)(y + a)^2 - a^2 x^2 = 0$
2. »  $(x^2 - z^2)z^2 + a^2 x(x + 2z) = 0$
3. »  $z^2(y + a)^2 - a^2(-y^2 + z^2 + a^2) = 0.$

Die Parameter der 4 Kegelflächen sind die Wurzeln der Gleichung

$$\lambda^4 + \lambda^2 + 1 = 0,$$

insofern die Gleichung des Büschels lautet

$$x^2 + y^2 - z^2 - a^2 - 2\lambda(yz + ax + az) = 0,$$

woraus folgt

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}}$$

### Tafel III.

**16.**  $S_1$  ist ein gleichseitiges Rotationshyperboloid, dessen Axe  $z$  zur 1. Projektionsebene senkrecht steht. Auf diesem Hyperboloid ist das windschiefe Vierseit  $AB A_1 B_1$  angenommen, durch welches die Geraden  $p$  und  $g$  bestimmt sind.

$C$  ist der Mittelpunkt von  $AA_1$ ,  $C_1$  der unendlich ferne Punkt von  $p$ ;  $D$  ist der Mittelpunkt von  $BB_1$ ,  $D_1$  der unendlich ferne Punkt von  $g$ . Für die Fläche  $S_2$  ist also die Gerade  $c$  die Axe von  $S_1$ ; die Gerade  $c_1$  ist die unendlich ferne Gerade der 1. Projektionsebene. Zur eindeutigen Bestimmung des hyperbolischen Paraboloides  $S_2$  ist noch die Gerade  $c_2$  gegeben, deren eine Projektion beliebig angenommen werden kann, während die andere Projektion durch die Bedingung, dass  $c_2$  die Geraden  $d$  und  $d_1$  schneiden muss, bestimmt ist. Die erste projizierende Ebene von  $c_2$  ist die eine Richtungsebene von  $S_2$ ; die 1. Projektionen der Geraden  $c$  sind daher zu  $c_2'$  parallel. Die 2. Projektionen der Geraden  $c$  gehen durch den Schnittpunkt von  $c''$  und  $c_2''$ , weil die projizierende Gerade dieses Punktes eine Gerade  $d$  von  $S_2$  ist.

Die Punkte von  $R_4$  werden konstruiert mit Hülfebenen, welche zur 1. Projektionsebene parallel sind. Jede solche Ebene schneidet aus  $S_1$  einen Kreis und aus  $S_2$  die unendlich ferne Gerade  $c_1$  und eine Gerade  $d$ , welche Durchmesser des Kreises ist.  $R_4$  geht also durch die Kreispunkte auf der Geraden  $c_{1\infty}$ . Die Kurve besitzt eine orthogonale Axensymmetrie in Bezug auf die Axe  $z$ , d. h. die Gerade  $c$ ; diese Symmetrie projiziert sich als zentrische Symmetrie für die 1. und als Axensymmetrie für die 2. und 3. Projektion.

Speziell zu beachten sind die Punkte 5, 6, 13, 14, die Ecken eines auf  $S_1$  liegenden Vierseits  $P_5 P_{14} P_6 P_{13}$ .

**17.** Die unendlich fernen Punkte von  $R_4$  sind die Schnittpunkte der in der unendlich fernen Ebene liegenden Geraden  $c$  und  $d$  mit dem unendlich fernen Querschnitt des Hyperboloides. Zwei dieser Punkte sind die schon erwähnten unendlich fernen Kreispunkte auf der Geraden  $c_1$ . Um die Richtungen der zwei andern zu ermitteln, schneidet man die zur 1. Projektionsebene senkrechte Ebene über  $m$ , parallel  $c_2'$ , mit dem Richtungskegel des Hyper-

boloides von der Spitze  $L$ ; wobei  $L$  so bestimmt ist, dass der Grundkreis des Richtungskegels auf der Parallelebene zur 1. Projektionsebene durch den Mittelpunkt von  $S_1$  dieselbe 1. Projektion hat, wie die Kreise des Hyperboloides in den Hülfebenen durch 9 und 10 oder 11 und 12. Die Schnittlinien  $u_1^*$  und  $u_2^*$  der Richtungsebene mit dem Richtungskegel geben die Richtungen der reellen Asymptoten von  $R_4$ . Man leitet daraus die Geraden  $c_3$  und  $c_4$  ab, deren unendlich ferne Punkte auf  $R_4$  liegen. Die 2. Projektionen derselben sind parallel zu  $u_1^*$  und  $u_2^*$ ; die 1. Projektionen können aus den 2. gefunden werden durch Benützung der Beziehung, dass die Geraden  $c$  die Geraden  $d$  schneiden.

Die Tangentialebenen in den unendlich fernen Punkten von  $c_3$  und  $c_4$  an  $S_2$  gehen durch die Gerade  $d_\infty$ ; sie stehen also senkrecht zur 1. Projektionsebene, folglich sind  $c_3'$  und  $c_4'$  auch die 1. Projektionen der Asymptoten  $u_1$  und  $u_2$  von  $R_4$ . Die Tangentialebenen in jenen unendlich fernen Punkten an  $S_1$  gehen durch den zu  $m$  senkrechten Durchmesser  $s$  des Kehlkreises des Hyperboloides. Die Schnittpunkte von  $s$  mit den Geraden  $c_3'$  und  $c_4'$  sind die Durchstosspunkte der Asymptoten  $u_1$  und  $u_2$  mit der Kehlkreisebene  $xy$ .

18. Um die Tangente in  $P$  an  $R_4$  zu konstruieren, sucht man am besten den Durchstosspunkt derselben mit der Ebene  $xy$  oder mit einer Parallelebene dazu durch  $p$  oder  $g$ . In Tafel III sind die Tangenten einzelner Punkte konstruiert durch Bestimmung der Durchstosspunkte mit der zuerst genannten Ebene. Die Gerade  $s$  für die Tangentialebene des Punktes  $P$  an  $S_1$  ist die Polare des Punktes  $P'$  in Bezug auf den Umrisskreis.  $t$  wird erhalten als Parallele zum Durchmesser des Punktes  $P'$  durch den Schnittpunkt der Geraden  $c'$  durch  $P'$  mit der Geraden  $d_2$  in der Ebene des Umrisskreises. Auch hier stehen entsprechende Gerade  $s$  und  $t$  auf einander senkrecht; für die Konstruktion der Spur der Schmiegungebene ist daher das frühere kinematische Verfahren anwendbar.

Besonders zu beachten sind die Tangenten in den schon erwähnten Punkten 5, 6, 13 und 14. Die Gerade  $d_2'$  ist symmetrisch zu  $m$  in Bezug auf  $g'$  und  $p'$ . Also bildet die Gerade  $c'$  durch einen dieser Punkte, z. B. 5, mit  $d_2'$  und  $g'$  ein gleichschenkliges Dreieck. Die Spitze dieses Dreiecks, d. h. der Schnittpunkt von  $c'$  und  $d_2'$  oder der Durchstosspunkt der Geraden  $c$  mit der Ebene  $xy$ , liegt auf dem Mittellot des Radius von  $5'$ , welches zugleich die Linie  $s$  für den Punkt 5 ist.  $c$  liegt also in der Tangentialebene des Punktes 5 an  $S_1$ , ist daher selbst die Tangente dieses Punktes. Die Tangenten in  $5'$ ,  $6'$ ,  $13'$ ,  $14'$ , sind parallel zu  $m$ ; die Tangenten in der 2. Projektion gehen durch den Knotenpunkt von  $R_4''$ .

Fig. *a* gibt die neue 2. Projektion von  $R_4$  auf eine Ebene, welche zu  $d_4$  senkrecht steht; Fig. *b* diejenige auf eine Normalebene zu  $m$ . In der letzten Figur sind die Projektionen der Geraden  $c$  parallel zur  $z$ -Axe; speziell haben also auch die Tangenten in  $5''$ ,  $6''$ ,  $13''$ ,  $14''$  diese Richtung. Interessant ist noch die Projektion von  $R_4$  aus dem unendlich fernen Punkt von  $p$  oder  $g$ , wo eine Kurve entsteht, die mit sich selbst in einer zentrischen Involution steht, jedoch bei wesentlich anderer Form als in Art. 12.

19. Auch hier sollen die Gleichungen der sich durchschneidenden Flächen aufgestellt werden.  $S_1$  ist gegeben durch

$$x^2 + y^2 - z^2 = a^2.$$

Auf  $S_2$  liegen die Schnittlinien folgender Ebenenpaare:

$$\begin{array}{ll} z - a = 0 & \text{und} \quad x + y = 0 \\ z + a = 0 & x - y = 0 \\ z - a = 0 & z + a = 0 \\ x - y = 0 & x + y = 0 \end{array}$$

Also lautet die Gleichung von  $S_2$ :

$$(x - y)(z - a) - a(x + y)(z + a) = 0$$

oder 
$$z \{x - y - a(x + y)\} - a \{x - y + a(x + y)\} = 0,$$

wo  $a$  einen Parameter bedeutet, der durch eine weitere der Fläche auferlegte Bedingung bestimmt werden kann.

Die Richtungsebenen von  $S_2$  sind  $z = 0$  und  $x - y - a(x + y) = 0$ . Die ersten Projektionen der Geraden  $c$  sind daher parallel zur Linie

$$y = \frac{1 - a}{1 + a} x,$$

woraus sich die geometrische Bedeutung des Parameters  $a$  ergibt. Die Gleichung der 1. Projektion von  $R_4$  heisst

$$(x^2 + y^2 - a^2) \{x - y - a(x + y)\}^2 - a^2 \{x - y + a(x + y)\}^2 = 0$$

oder 
$$(x^2 + y^2) \{x - y - a(x + y)\}^2 - 2a^2 \{(x - y)^2 + a^2(x + y)^2\} = 0$$

Bringt man die Gleichung des Flächenbüschels auf die Form

$$x^2 + y^2 - z^2 - a^2 - 2\lambda \left[ z \{x - y - a(x + y)\} - a \{x - y + a(x + y)\} \right] = 0,$$

so sind die Parameter der Kegelflächen des Büschels bestimmt durch die Gleichung

$$\begin{vmatrix} 1 + \lambda^2(1 - a^2) & -\lambda^2(1 - a^2) & \lambda(1 + a) \\ -\lambda^2(1 - a^2) & 1 + \lambda^2(1 + a^2) & -\lambda(1 - a) \\ \lambda(1 + a) & -\lambda(1 - a) & -1 \end{vmatrix} = 0$$

also 
$$16a^2\lambda^4 + 4(1 + a^2)\lambda^2 + 1 = 0,$$

woraus sich die Werte  $\pm \frac{i}{2}$  und  $\pm \frac{i}{2a}$  ergeben.

## Tafel IV.

**20.**  $S_1$  ist ein hyperbolisches Paraboloid, bestimmt durch das windschiefe Vierseit  $AB A_1 B_1$ .  $S_2$  ist konstruiert wie auf Tafel III. Die Gerade  $d_\infty$  durch  $Z_\infty$  geht durch den Berührungspunkt von  $S_1$  mit der unendlich fernen Ebene; sie ist also Tangente an  $R_4$ . Folglich besitzt  $R_4$  einen parabolischen Ast. Ferner hat die Kurve 2 unendlich ferne Punkte in den Schnittpunkten der Geraden  $a$  und  $b$  im Scheitel von  $S_1$  mit der Geraden  $c_{1\infty}$ . Die Tangenten in diesen beiden Punkten sind die Geraden  $d_2$  und  $d_7$ . Die letzte Gerade  $d$ , welche  $R_4$  berührt, geht durch den Scheitel von  $S_1$ . Die 1. Projektion von  $R_4$  ist eine Kurve 3. Ordnung, deren 3. Asymptote die Linie  $m$  ist, hervorgehend aus der Tangente  $d_\infty$ .

Die Punkte von  $R_4$  sind konstruiert mit Hülfebenen, welche zur 1. Projektionsebene parallel laufen. Jede dieser Ebenen  $H$  schneidet aus  $S_1$  eine gleichseitige Hyperbel, deren Axen mit  $p'$  und  $g'$  zusammenfallen und deren Hauptaxe der Länge nach mit der Sehne über-

einstimmt, welche  $H$  aus der Umrissparabel der 2. Projektion schneidet;  $H$  schneidet aus  $S_2$  ausser  $c_{1\infty}$  eine Gerade  $d$ , welche Durchmesser der Hyperbel ist. Die Schnittpunkte der Hyperbel mit diesem Durchmesser sind Punkte von  $R_4$ .

Für die vorliegenden Verhältnisse ist folgende Konstruktion der Schnittpunkte einer gleichseitigen Hyperbel mit einem Durchmesser  $g$  zweckmässig: Man beschreibe (Fig. c) um den Mittelpunkt der Hyperbel einen Kreis, welcher die Kurve in den Scheiteln berührt. Im einen Scheitel zieht man die Tangente  $s$ , welche  $g$  in  $S$  schneidet. Durch  $S$  zieht man die Parallele  $g'$  zur Hauptaxe und projiziert deren Schnittpunkte  $G'$  und  $H'$  aus dem andern Scheitel  $C$  auf  $g$ . Die Projektionen sind die gesuchten Punkte, deren Genauigkeit mit Hülfe der Schnittpunkte  $H_1 H_2$  und  $G_1 G_2$  auf den Asymptoten kontrolliert werden kann. Der Beweis der Konstruktion ergibt sich aus der zentrischen Kollineation zwischen der Hyperbel und dem Kreis.

Auch hier ist  $R_4$  orthogonal symmetrisch in Bezug auf die  $z$ -Axe; jedoch hat diese Symmetrie einen andern Charakter als diejenige der vorigen Figur: die 2 Punkte von  $R_4$  auf der nämlichen Geraden  $d$  gehören hier demselben Ast an; unter diesen Geraden befinden sich daher auch die reellen Tangenten von  $S_2$  an  $R_4$ .

Die Konstruktion ist auf Tafel IV speziell durchgeführt für 2 Hülfeebenen  $H$ , welche durch  $p''$  und  $g''$  harmonisch getrennt werden. Die 2. Projektion von  $R_4$  ist mit sich selbst in einer zentrischen Involution mit  $g''$  als Zentrum und  $p''$  als Axe. Weil die Geraden 1, 4 und 2, 3 die Gerade  $d_1$  schneiden, so gehören die Seiten des Vierseits 1, 3, 2, 4 der Fläche  $S_2$  an. Diese eingeschriebenen Vierseite projizieren sich namentlich in der 1. Projektion von  $R_4$  einfach: die Projektionen der Gegenecken sind konjugierte Punkte der  $C_3$ . Die Vierseite von  $S_1$ , welche  $R_4$  eingeschrieben sind, projizieren sich als eingeschriebene Rechtecke der  $C_3$ , deren Gegenecken ein weiteres System konjugierter Punkte dieser Kurve liefern.

Fig. a gibt die Projektion von  $R_4$  auf eine zu  $m$  senkrechte Ebene; es entsteht eine Kurve, für welche der eine Doppelpunkt ein unendlich ferner Rückkehrpunkt mit der  $z$ -Axe als Rückkehrtangente ist. Fig. b gibt die Projektion von  $R_4$  auf eine zu  $d_4$  senkrechte Ebene; die 2. Projektion von  $R_4$  und die Transformationen a) und b) zeigen also die eingangs erwähnten 3 Möglichkeiten für die scheinbaren Doppelpunkte.

**21.**  $R_4$  kann hier auch konstruiert werden, indem man nach Angabe der nötigen Bestimmungselemente die Kurve  $C_3$  direkt nach planimetrischer Methode konstruiert. Nach den von Steiner und Clebsch entwickelten Theorien findet man bequem die Endpunkte von Durchmessern der  $C_3$  und daraus dann die Punkte von  $R_4$  auf Geraden  $d$  von  $S_2$ .

Es ist überhaupt in gewissen Fällen zweckmässig, die Durchdringungskurve zweier Flächen 2. Grades dadurch zu bestimmen, dass man zunächst die gegebenen Elemente beider Flächen einer Transformation unterwirft, so dass die neue Projektion der Kurve  $R_4$  von der 3. Ordnung wird, dann diese Kurve nach planimetrischer Methode konstruiert und endlich daraus die ursprünglichen Projektionen ableitet.

Die nächste Tafel bietet ein Beispiel für dieses Verfahren.

**22.** Die Tangentenkonstruktion ist für Tafel IV einfach, wenn man die Durchstosspunkte der Tangenten in der Parallelebene zur 1. Projektionsebene durch den Scheitel von  $S_1$  sucht.  $s$  ist die Verbindungslinie der Fusspunkte der Senkrechten aus  $P'$  auf die Mittellinien des Quadrates  $A' B' A_1' B_1'$ .  $t$  geht durch den Schnittpunkt von  $d_3'$  mit der Parallelen durch  $P'$  zu  $m$  und ist gleich gerichtet wie der Durchmesser  $d'$  von  $P'$ .

Die Spurkurve der Tangentenfläche zerfällt in die Gerade  $d_3$  und eine Kurve 7. Ordnung, für welche die unendlich ferne Gerade eine doppelte Rückkehrtangente ist.  $C_7$  besitzt 12 imaginäre Doppelpunkte zu je dreien in 4 nicht reellen Geraden.

## Tafeln V und VI.

**23.** Beide Tafeln gehören zusammen. Tafel VI enthält in orthogonal-axonometrischer Darstellung das, was in Tafel V innerhalb eines rechtwinkligen Parallelepipedes, dessen Dimensionen aus den angegebenen Pfeilen ersichtlich sind, gezeichnet ist.

$S_1$  ist ein gleichseitiges Rotationshyperboloid mit zur 3. Projektionsebene senkrechter Axe. Das Vierseit  $A B A_1 B_1$  ist so gewählt, dass seine 1. Projektion ein der Umrisshyperbel umschriebenes Parallelogramm ist, von welchem 2 Gegenseiten mit den Scheiteltangenten zusammen fallen.  $p'$  und  $g'$  bilden ein Paar konjugierte Durchmesser der Umrisshyperbel.  $S_2$  ist so gewählt, wie in den beiden vorhergehenden Fällen, jedoch mit Rücksicht darauf, dass  $R_4$  4 reelle unendlich ferne Punkte erhalte.

Die Konstruktion der Punkte von  $R_4$  ist nach dem in Art. 20 entwickelten Verfahren ausgeführt. Man kann jedoch hier mit Vorteil die in Art. 21 besprochene Methode verwenden: Man konstruiert zunächst für die nötige Anzahl von Bestimmungselementen von  $R_4$  eine neue 2. Projektion auf eine Ebene, welche senkrecht steht zu einer Asymptote der Umrisshyperbel der 1. Projektion. Diese neue 2. Projektion ist eine Kurve 3. Ordnung, für welche die  $z$ -Axe eine Axe orthogonaler Symmetrie ist. Die Schnittpunkte von  $C_3$  mit den zur  $z$ -Axe senkrechten Sehnen liefern die neuen 2. Projektionen der Schnittpunkte von  $R_4$  mit den Geraden  $d$  von  $S_2$ , woraus dann die ursprünglichen Projektionen hergeleitet werden können.

Von den Geraden  $d$  sind auch hier 4 Tangenten an  $R_4$ ; 2 derselben,  $d_4$  und  $d_7$ , haben unendlich ferne Berührungspunkte; ihre 1. Projektionen fallen mit den Asymptoten der Umrisshyperbel zusammen.

Die 2 weiteren Asymptoten von  $R_4$  ergeben sich so: Die Normalebene über  $m$  zur 1. Projektionsebene ist eine Richtungsebene des hyperbolischen Paraboloides  $S_2$  (die andere Richtungsebene ist die erste Projektionsebene selbst); sie schneidet den Asymptotenkegel von  $S_1$  in 2 Geraden  $u_2^*$  und  $u_4^*$ , deren unendlich ferne Punkte auf  $R_4$  liegen. Um diese Geraden zu bestimmen, ist eine Hülfebene parallel zur 3. Projektionsebene gelegt, deren zweite Spur  $k''$  ist. Diese Hülfebene schneidet die Richtungsebene nach einer Geraden und den Asymptotenkegel nach einem Kreis. Die Schnittpunkte  $K$  der Geraden mit dem Kreis sind Punkte von  $u_2^*$  und  $u_4^*$ . Die Konstruktion der Punkte  $K$  ist ausgeführt mit einer Umklappung der Ebene in die Parallelebene zur 2. Projektionsebene durch den Mittelpunkt  $M$  des Kreises. Auch die Drehung der Hülfebene in eine Parallelebene zur 1. Projektionsebene durch  $M$  ist gezeichnet. Nachdem  $u_2^*$  und  $u_4^*$  gefunden sind, bestimmt man die zu ihnen parallelen Geraden  $c$  von  $S_2$ ,



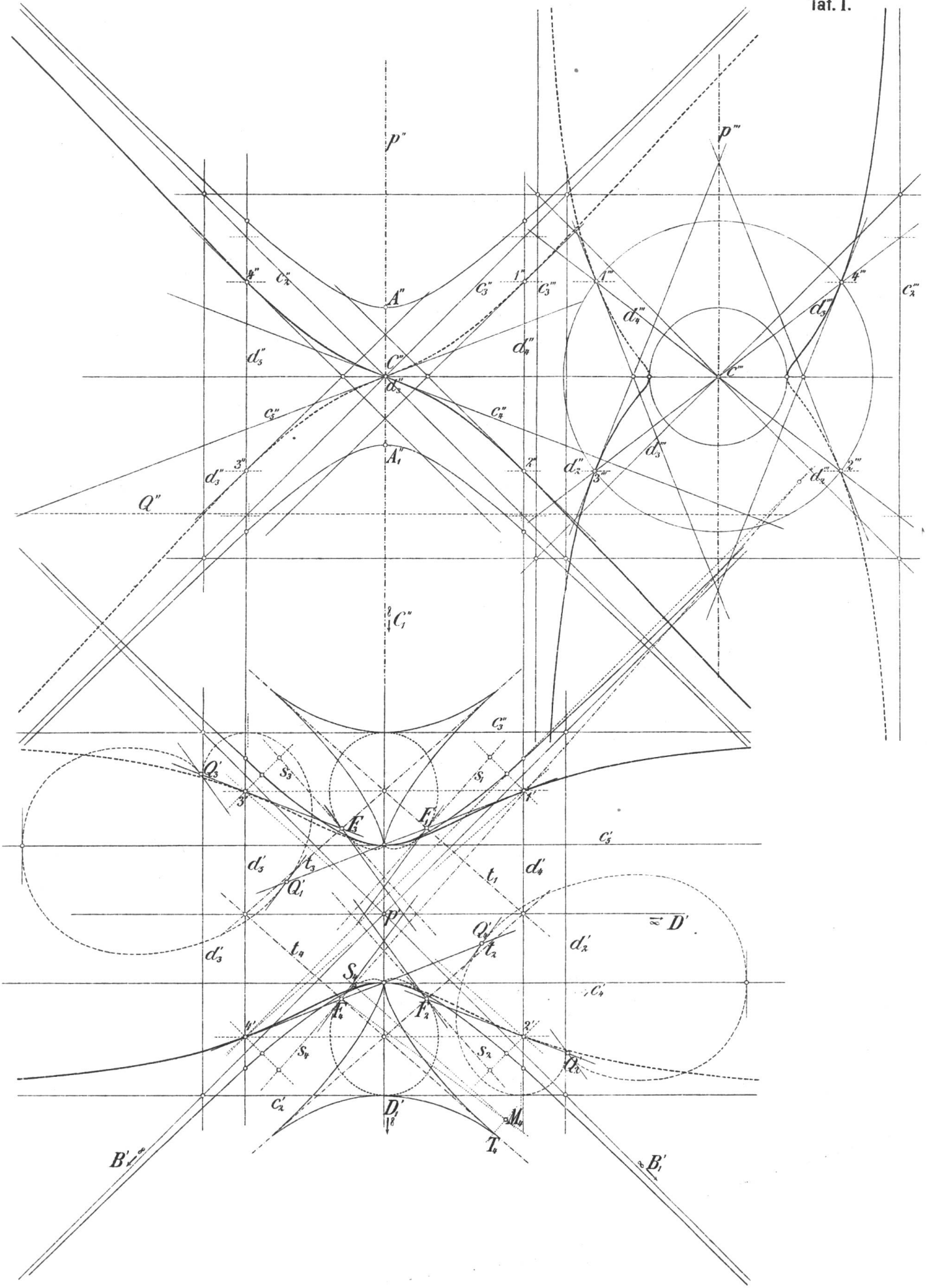
nämlich  $c_4$  und  $c_6$ : man findet zunächst die 2. Projektionen derselben und daraus dann die ersten. Weil die Tangentialebenen in den unendlich fernen Punkten von  $c_4$  und  $c_6$  durch  $d_\infty$  gehen, also rücksichtlich der 1. Projektionsebene projicierend sind, fallen die 1. Projektionen der Asymptoten  $u_2$  und  $u_4$  mit  $c_4'$  und  $c_6'$  zusammen. Die Durchstosspunkte von  $u_2$  und  $u_4$  mit der Parallelebene zur 1. Projektionsebene durch den Mittelpunkt von  $S_1$  liegen auf dem zu  $m$  konjugierten Durchmesser der Umrisshyperbel, woraus auch  $u_2''$  und  $u_4''$  abgeleitet werden können.

Der unendlich ferne Doppelpunkt der 1. Projektion von  $R_4$  hat hier einen wesentlich andern Charakter als der unendlich ferne Doppelpunkt in der 1. Projektion von Tafel I, II oder III: in ihm schneiden sich die Projektionen von 2 Zügen des nämlichen Astes von  $R_4$ . Die 3 Asymptoten dieses Astes sind  $u_2$ ,  $u_4$  und  $d_4$ ;  $d_7$  ist die Asymptote des zweiten Astes.

Interessante Kurvenformen entstehen, wenn man die 2. Projektionsebene so transformiert, dass sie senkrecht steht zu einer der Geraden  $d_5$ ,  $d_6$ ,  $d_{10}$ ,  $d_3$ ,  $d_{12}$ ,  $p$ ,  $g$ , oder  $m$ .

**24.** In Tafel V sind noch die Tangenten an  $R_4$  in 1 und 3 konstruiert mit Hülfe der Durchstosspunkte auf der Parallelebene zur 1. Projektionsebene durch den Mittelpunkt von  $S_1$ .  $s$  ist die Polare von  $P'$  in Bezug auf die Umrisshyperbel;  $t$  wird erhalten, wenn man durch den Schnittpunkt der Geraden  $c'$  des Punktes  $P'$  mit  $d_{14}$  die Parallele zum Durchmesser von  $P'$  zieht.





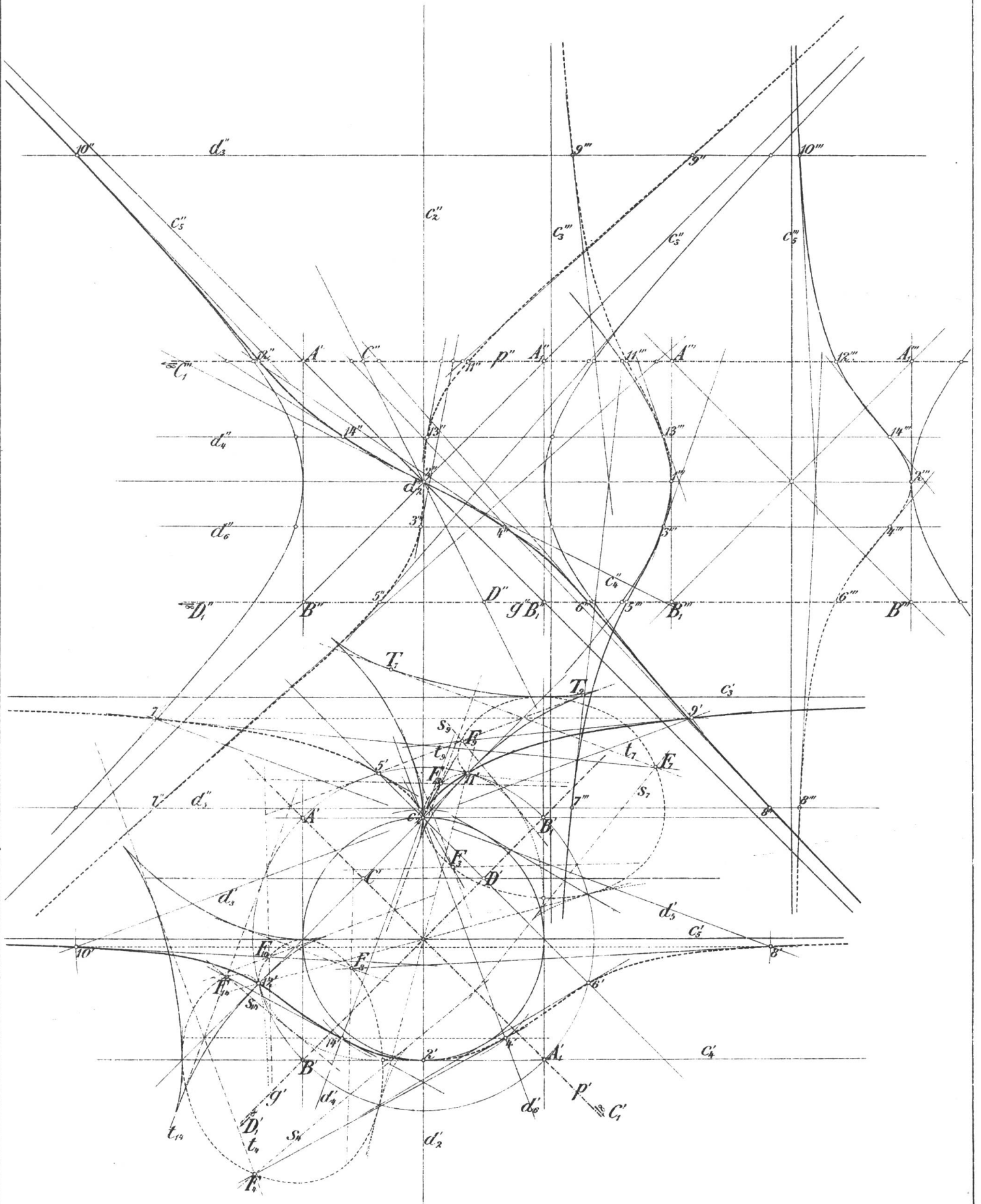


Fig. a.

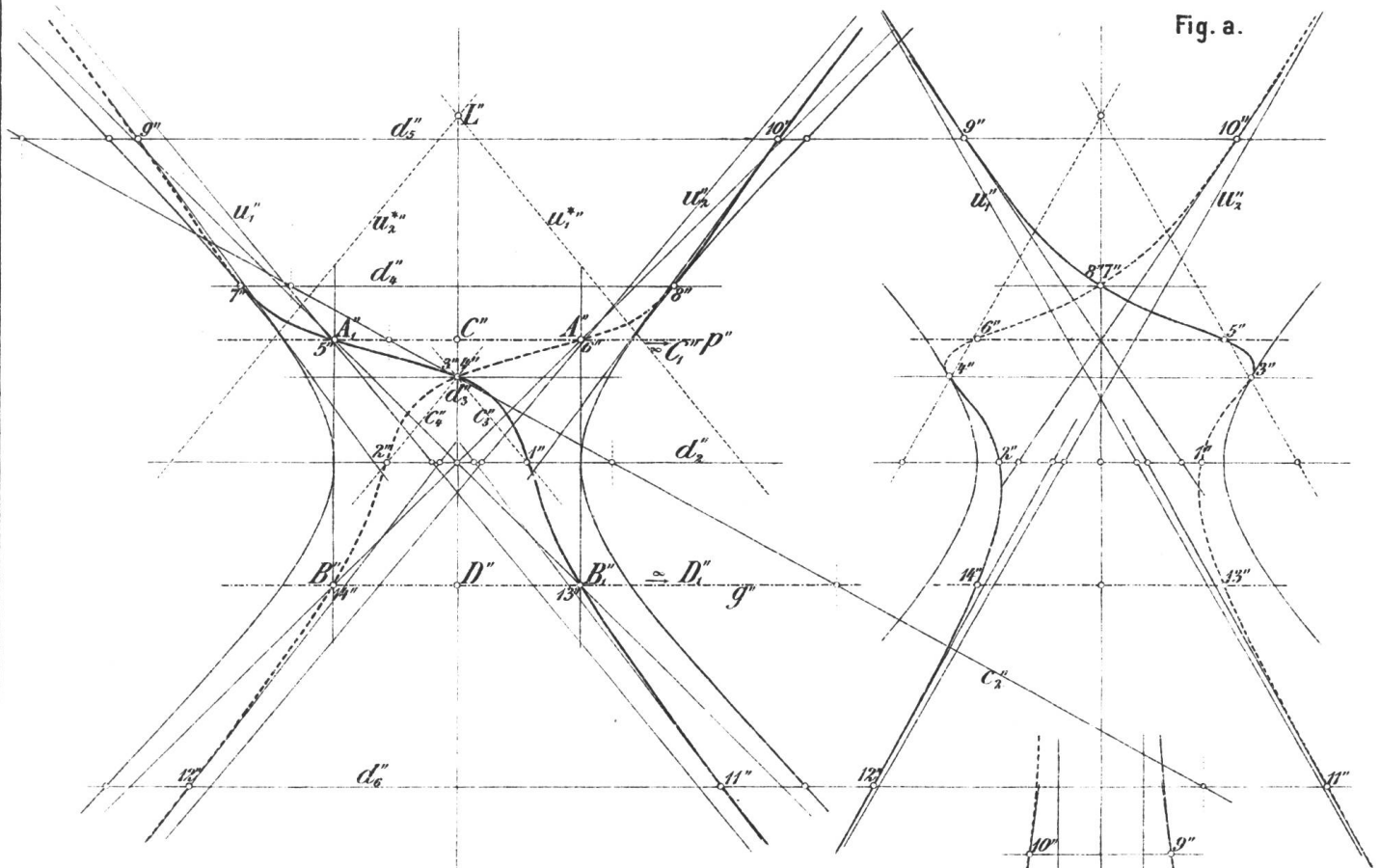
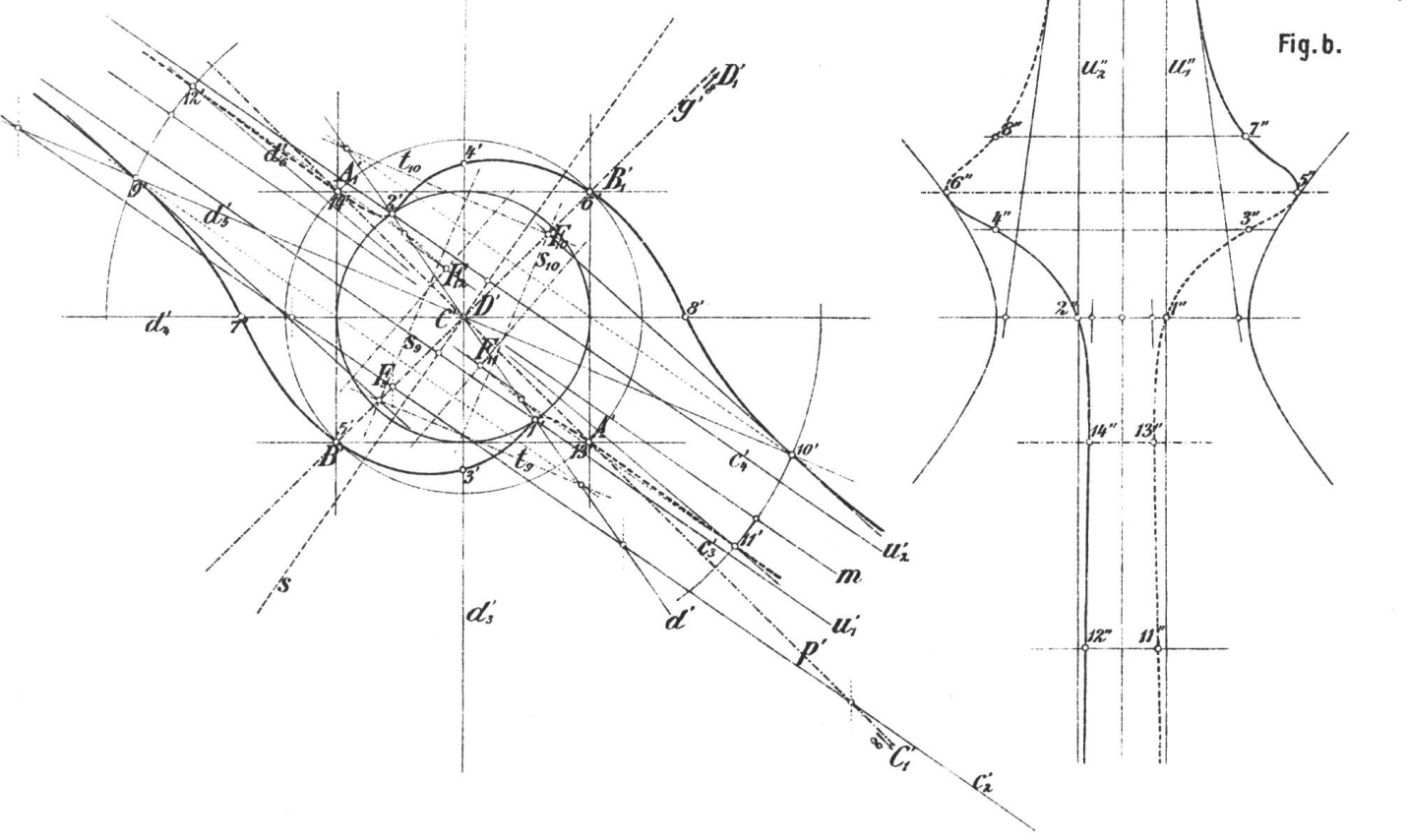


Fig. b.



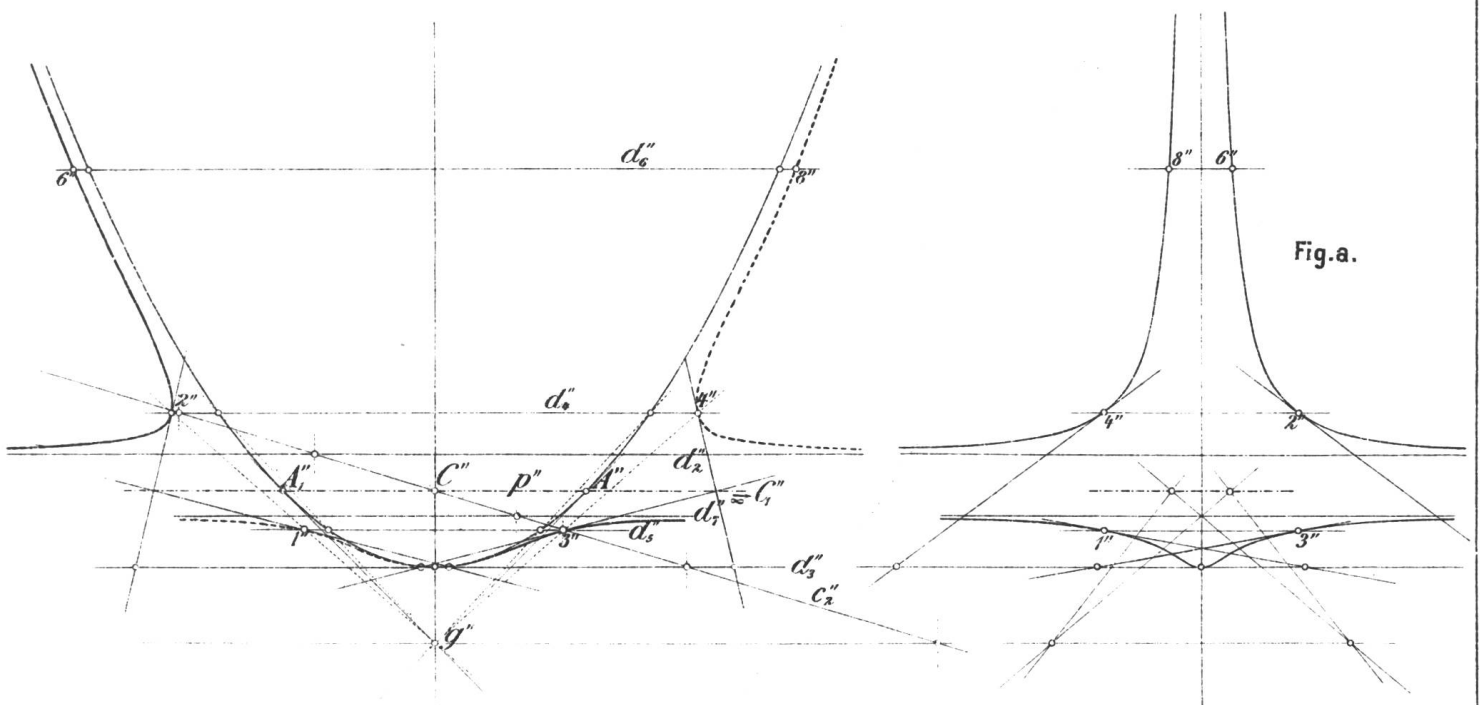


Fig. a.

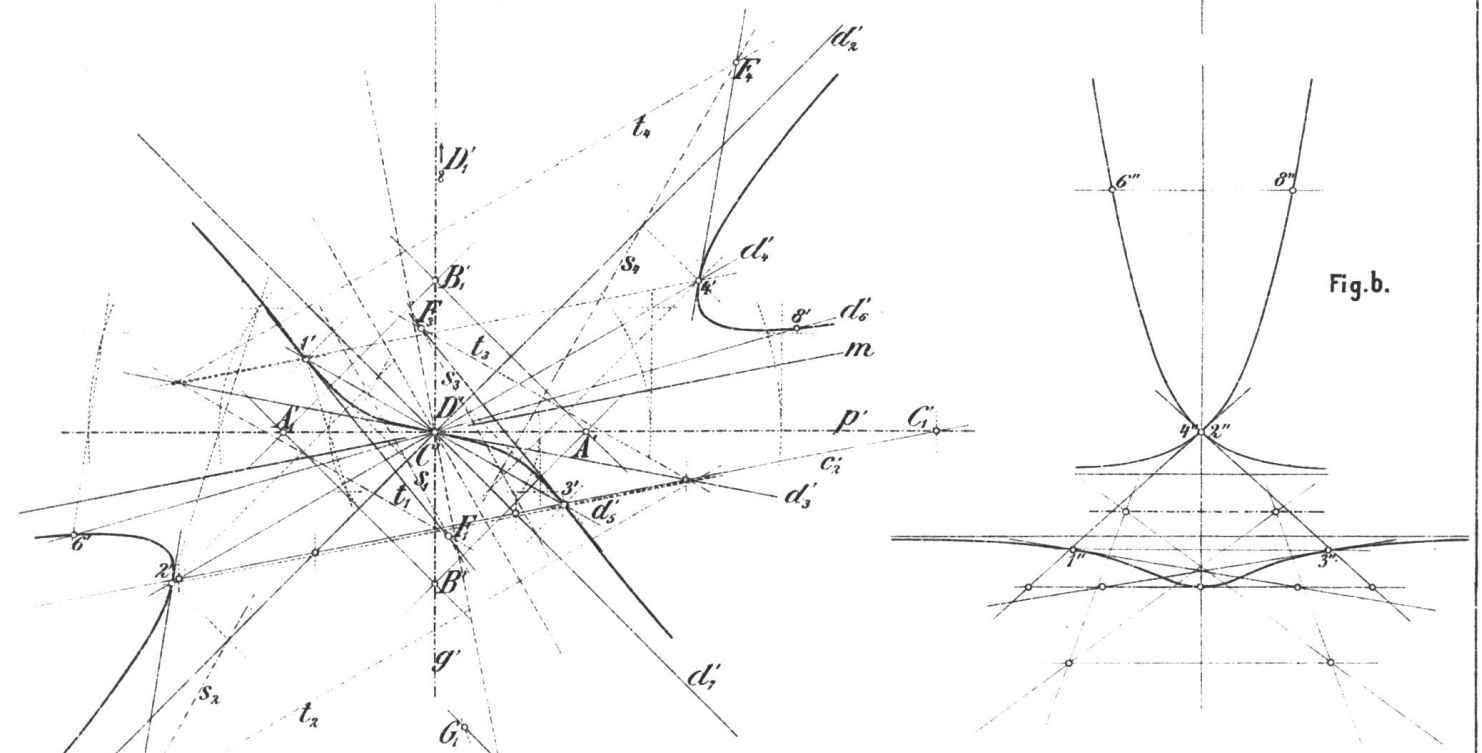


Fig. b.

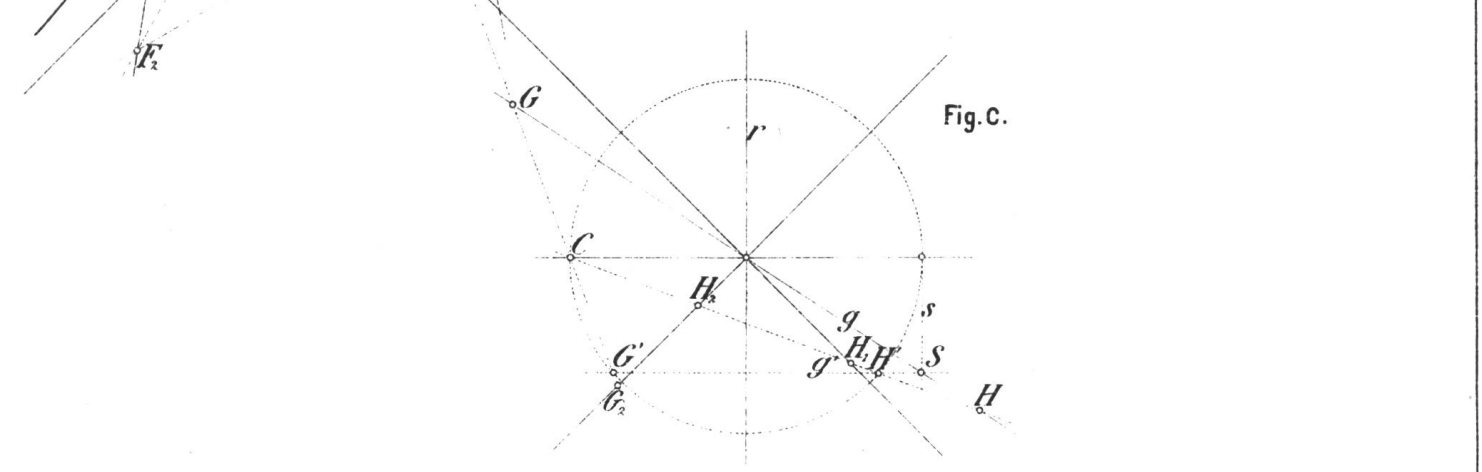


Fig. c.

