

**Zeitschrift:** Wasser- und Energiewirtschaft = Cours d'eau et énergie  
**Herausgeber:** Schweizerischer Wasserwirtschaftsverband  
**Band:** 66 (1974)  
**Heft:** 3

**Artikel:** Optimale Bewirtschaftung von Speicherseen  
**Autor:** Vischer, Daniel / Spreafico, Manfred  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-921234>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 08.01.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Speicherseen sind Bestandteile von wasserwirtschaftlichen Anlagen; sie dienen der Abstimmung eines gegebenen Wasserdargebots auf einen bestimmten Wasserbedarf. Ihre Erstellung bedingt den Bau einer Talsperre und bindet dadurch einen meist erheblichen Anteil der Anlagekosten. Es ist deshalb besonders wichtig, Speicherseen optimal ausulegen und zu betreiben.

Selbstverständlich bedarf diese Optimierung konkreter Zielvorstellungen (für Speicherseen von Hochdruckkraftwerken muss beispielsweise deren Rolle innerhalb des Energiemarktes definiert werden). Dabei sind im wesentlichen zwei Fälle zu unterscheiden:

- a) Die Speicherseen sind noch nicht erstellt. Ihre Optimierung muss sich somit auf eine Prognose zukünftiger Gegebenheiten stützen, was ihre Aussagekraft schwächt. Dafür kann sie sich sowohl auf die Auslegung der Speicherseen als auch auf deren Betrieb beziehen.
- b) Die Speicherseen sind bereits vorhanden. Die Optimierung lässt sich deshalb angesichts bekannter — weil gegenwärtiger — Gegebenheiten vornehmen. Wenn von Umbauten abgesehen wird, muss sie sich aber auf die Ermittlung des günstigsten Betriebsprogrammes beschränken.

Der vorliegende Aufsatz befasst sich mit dem zweiten Fall. Von der Methodik ausgehend, die der sogenannten Systemanalyse eigen ist, wird auf gewisse Optimierungsansätze des Operations Research hingewiesen.

## 1. Einige Begriffe

### 1.1 DAS WESEN DER SYSTEMANALYSE

Das Fachgebiet der Systemanalyse ist noch zu jung, um über allgemein anerkannte Begriffe zu verfügen. In Uebereinstimmung mit [1] sei aber folgendes festgehalten:

Um aus vielen möglichen Lösungen einer bestimmten Aufgabe die beste auszuwählen, bedarf es eines entsprechenden Vorgehens. Dieses bildet im technischen Bereich Gegenstand des sogenannten Systems Engineering<sup>1</sup>.

Systems Engineering umfasst also gewissermassen die Kunst und die Wissenschaft der Auswahl. Diese Kunst ist wohl so alt wie die Menschheit selbst. Denn schon immer mussten alternative Möglichkeiten an den Zielen der Entscheidungsinstanzen gemessen werden unter Berücksichtigung der natürlichen, moralischen, gesetzlichen, wirtschaftlichen, politischen usw. Einschränkungen. Hingegen ist die zugehörige Wissenschaft verhältnismässig

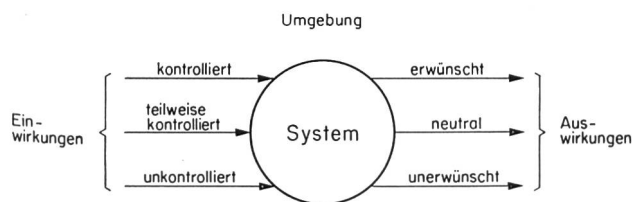


Bild 1 Schematische Darstellung eines Systems.

[1] ... [6] Literaturhinweise am Ende des Berichtes.

<sup>1</sup> Eine befriedigende deutsche Uebersetzung existiert nicht.

jung; sie tritt praktisch erst seit 10 bis 20 Jahren in Erscheinung und wird als Systemanalyse bezeichnet.

Ein System (Bild 1) ist ein Verband von zusammenwirkenden Teilen (Subsystemen) und kann definiert werden, indem festgelegt wird:

- a) welche Teile zum System und welche zu dessen Umgebung gehören (Systemgrenzen);
- b) wie die Einwirkungen der Umgebung auf das System sind und umgekehrt;
- c) wie die Wechselwirkungen zwischen den Teilen des Systems sowie den Ein- und Auswirkungen sind (einschliesslich Rückkoppelungseffekte).

Die voll oder nur teilweise kontrollierbaren Einwirkungen werden Entscheidungsgrössen genannt. Jede Wahlkombination derselben entspricht einem bestimmten Plan. Doch verringern die vorhandenen Einschränkungen (Restriktionen) die Zahl der möglichen Pläne auf die zulässigen.

Ihre Bewertung hinsichtlich der erwünschten und unerwünschten Auswirkungen des Systems setzt ein Kriterium voraus, ein Ziel. Dieses besteht im allgemeinen aus mehreren Teilzielen, von denen einige quantifizierbar sind und andere nicht. Und unter den ersteren gibt es solche, die in vergleichbaren Einheiten erfasst und darum auf «einen Nenner» gebracht werden können; bei andern gelingt dies nicht. Auch bei den zu berücksichtigenden Einschränkungen lassen sich quantifizierbare und nicht-quantifizierbare unterscheiden.

### 1.2 DIE AUSRICHTUNG DES OPERATIONS RESEARCH

Im Operations Research<sup>2</sup> wird nun davon ausgegangen, dass die Teilziele, die Einschränkungen und Systemeigenschaften quantifiziert werden können. Ferner wird im Sinne einer bewussten Vereinfachung vorausgesetzt, dass sich die Teilziele entweder in vergleichbaren Einheiten ausgedrückt zu einer einzigen Zielgrösse zusammensetzen oder dann unabhängig voneinander einzeln betrachten lassen<sup>2</sup>.

Der Lösungsgang eines Operations Research-Problems umfasst deshalb im wesentlichen folgende Schritte:

- a) Quantifizierung der Systemeigenschaften durch die Systemparameter  $s_1, s_2, s_3 \dots s_j \dots$
- b) Bezeichnung der Entscheidungsgrössen durch die Entscheidungsvariablen  $x_1, x_2, x_3 \dots x_i \dots$
- c) Quantifizierung der Einschränkungen durch die Einschränkungsfunktionen  $g_m = g_m(x_i, s_j) \leq 0; g_1, g_2, g_3 \dots g_m \dots$
- d) Formulierung des Ziels als Zielfunktion  $Z = Z(x_i, s_j)$

- e) Lösung der Zielfunktion

$$Z = \max Z(x_i, s_j)$$

oder

$$Z = \min Z(x_i, s_j)$$

unter Einhaltung der Einschränkungen

$$g_m(x_i, s_j) \leq 0$$

zur (quantitativen) Bestimmung der Entscheidungsvariablen  $x_i$ .

<sup>2</sup> Operations Research-Methoden zur Erreichung inkommensurabler Teilziele werden erst in jüngster Zeit diskutiert.

Die Schritte a) bis d) umreißen die Aufgabe (Problemdefinition) und Schritt e) löst diese. Anders geschrieben bedeutet Schritt e):

Bestimme  $x_i$  derart, dass  $Z$  maximal bzw. minimal und  $g_m \leq 0$  eingehalten wird!

Für solche Optimierungsaufgaben steht eine Fülle von Lösungsverfahren zur Verfügung. Im Zusammenhang mit der Aufgabe einer optimalen Speicherbewirtschaftung seien insbesondere erwähnt:

- die Differentialrechnung
- die lineare Programmierung
- die nichtlineare Programmierung
- die dynamische Programmierung
- die Simulation

Es hängt einerseits von der Art der Ziel- und Einschränkungsfunktionen und andererseits von den verfügbaren Hilfsmitteln (Datenverarbeitungsanlagen) ab, welches Verfahren sich am besten eignet. Im Rahmen dieses Aufsatzes ist es selbstverständlich nicht möglich, alle denkbaren Fälle aufzuzeigen. Deshalb werden nur zwei bis drei Beispiele herausgegriffen, die eine Veranschaulichung zweier häufig verwendeter Verfahren ermöglichen: der linearen Programmierung und der dynamischen Programmierung. Ueber die weiteren Verfahren zur Behandlung speicherwirtschaftlicher Probleme wird nur eine grobe Uebersicht vermittelt.

## 2. Lineare Programmierung

### 2.1 DAS VERFAHREN

Ergibt die Problemdefinition, dass die Zielfunktion und die Einschränkungsfunktionen linear von den (nicht negativen) Entscheidungsvariablen abhängig sind, kann die Problemlösung mit dem Verfahren der linearen Programmierung gefunden werden. Das Problem präsentiert sich also wie folgt:

Maximiere die Zielgrösse

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_i x_i \dots + c_n x_n$$

unter Berücksichtigung der Einschränkungen

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \leq b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \leq b_2$$

$$\begin{matrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{matrix}$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \leq b_m$$

$$\begin{matrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{matrix}$$

und der Nichtnegativität der Entscheidungsvariablen

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$\cdot$$

$$\cdot$$

$$x_i \geq 0$$

$$\cdot$$

$$\cdot$$

$$x_n \geq 0$$

(Beim entsprechenden Minimierungsproblem weisen die Einschränkungsfunktionen umgekehrte Ungleichheitszeichen auf.)

Die Ungleichungen umreißen in einem n-dimensionalen Raum den sogenannten Lösungsraum, in welchem jedes zulässige Zahlenspiel der Entscheidungsvariablen liegen muss. Zufolge der Linearität weist dieser Lösungsraum aber gewissermassen Ecken auf, von denen eine dem optimalen Zahlenspiel entspricht. Das Lösungsverfahren kann sich folglich darauf beschränken, die «richtige» Ecke zu finden.

Tatsächlich wurden für die lineare Programmierung verschiedene Algorithmen entwickelt, die es erlauben, sich mit den Mitteln der linearen Algebra an die optimale Ecke des Lösungsproblems «heranzutasten». Voraussetzung ist allerdings, dass der Lösungsraum konvex ist. Der bekannteste unter diesen Algorithmen ist der sogenannte Simplex-Algorithmus [2], auf dessen Beschreibung hier aber nicht eingegangen wird; der Simplex-Algorithmus steht heute ja als Standardprogramm in jedem Rechenzentrum zur Verfügung und kann dort ohne Schwierigkeiten verwendet werden.

Der Vorteil der linearen Programmierung liegt also darin, dass sie ein festumrissenes Lösungsverfahren anbietet. Sowohl die Problemdefinition wie die Problemlösung sind klar und übersichtlich. Deshalb wird die lineare Programmierung oft auch dort angewendet, wo die Zielfunktion und die Einschränkungsfunktionen nur näherungsweise linearisiert werden können. Allerdings sind dann die Ergebnisse entsprechend sorgfältig zu interpretieren. Gerade Speicherbewirtschaftungsprobleme erheischen diesbezüglich besondere Aufmerksamkeit.

### 2.2 DIE OPTIMALE BEWIRTSCHAFTUNG EINES EINZWECKSPEICHERSEES BEI SAISONABHÄNGIGEN PREISEN

Im Sinne eines grundsätzlichen Beispiels für eine mögliche Anwendung der linearen Programmierung sei das in [3] beschriebene Problem wiedergegeben:

Aus einem Speichersee mit dem Fassungsvermögen  $V_{max}$  und bekannten monatlichen Zuflüssen  $I_i$  wird Wasser an einen Verbraucher (z. B. an ein Kraftwerk) abgegeben. Dieser ist bereit, der Saison entsprechende Wasserpreise  $P_i$  zu bezahlen. Für den Betreiber des Speichersees stellt sich folglich die Frage, wie er die monatlichen Abflüsse  $O_i$  wählen soll, um den grösstmöglichen Ertrag zu erzielen (Bild 2). Der entsprechende Aufwand sei monatlich konstant, weshalb er aus dem Problem ausgeklammert werden kann. Zudem sei angenommen, dass der Speichersee am Anfang des Jahres einen Inhalt von  $V_a$  aufweise und nie Wasser verliere (durch Verdunstung, Versickerung usw.).

Dem in Abschnitt 2.1 angeführten Lösungsgang folgend kann nun festgehalten werden:

#### a) Systemparameter

- Monatliche Zuflüsse in den Speicher  $I_1, I_2 \dots I_{12}$
- Preis der monatlichen Abflüsse  $P_1, P_2 \dots P_{12}$
- Anfangsinhalt  $V_a$
- Fassungsvermögen des Speichers  $V_{max}$

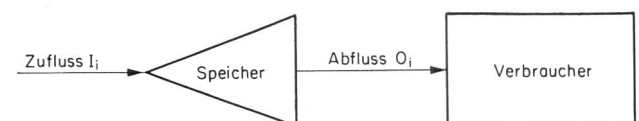


Bild 2 Schema eines Einzweckspeichers.

b) Entscheidungsvariable

— Monatliche Abflüsse  $O_1, O_2 \dots O_{12}$

c) Einschränkungsfunktionen

— Der Abfluss darf den Zufluss vermehrt um den Anfangsinhalt nicht übersteigen (Einhaltung des Absenkeziels)

Nach dem 1. Monat gilt  $O_1 \leq I_1 + V_a$   
 Nach dem 2. Monat gilt  $O_1 + O_2 \leq I_1 + I_2 + V_a$   
 Nach dem 3. Monat gilt  $O_1 + O_2 + O_3 \leq I_1 + I_2 + I_3 + V_a$   
 .  
 .  
 .  
 Nach dem 12. Monat gilt  $\sum_{i=1}^{12} O_i \leq \sum_{i=1}^{12} I_i + V_a$

— Die gespeicherte Wasserfracht darf nie grösser werden als das Fassungsvermögen des Speichersees (Einhaltung des Stauziels):

Nach dem 1. Monat gilt  $V_a + I_1 - O_1 \leq V_{max}$   
 Nach dem 2. Monat gilt  $V_a + I_1 + I_2 - O_1 - O_2 \leq V_{max}$   
 Nach dem 3. Monat gilt  $V_a + I_1 + I_2 + I_3 - O_1 - O_2 - O_3 \leq V_{max}$   
 .  
 .  
 .

Nach dem 12. Monat gilt  $V_a + \sum_{i=1}^{12} (I_i - O_i) \leq V_{max}$

— Die Abflüsse dürfen nicht negativ sein

$O_1 \geq 0$   
 $O_2 \geq 0$   
 $O_3 \geq 0$   
 .  
 .  
 .  
 $O_{12} \geq 0$

d) Zielfunktion

— Der Jahresertrag des Betreibers soll maximal werden

$Z = \sum_{i=1}^{12} P_i O_i$

e) Lösung

— Da sowohl die Zielfunktion wie die 36 Einschränkungsfunktionen linear sind, führt die Anwendung des Simplex-Algorithmus zur Lösung, das heisst zum optimalen Zahlenspiel der Entscheidungsvariablen  $O_1, O_2, \dots O_{12}$

Das gleiche Problem kann selbstverständlich auch für kürzere Intervalle als 1 Monat und über längere Perioden als 1 Jahr formuliert werden.

2.3 DIDAKTISCHES ZAHLENBEISPIEL

Der besseren Uebersicht halber wird das oben beschriebene Beispiel stark vereinfacht, indem das Jahr nicht in 12 Monate, sondern in ein Sommer- und in ein Winterhalbjahr aufgeteilt wird. Dann lässt sich das Verfahren der linearen Programmierung nämlich graphisch darstellen und erläutern.

a) Systemparameter

— Sommerzuflüsse	$I_s = 100 \text{ Mio m}^3$
— Winterzuflüsse	$I_w = 35 \text{ Mio m}^3$
— Preis der Sommerabflüsse <sup>4</sup>	$P_s = 0,05 \text{ Fr./m}^3$
— Preis der Winterabflüsse <sup>4</sup>	$P_w = 0,20 \text{ Fr./m}^3$
— Anfangsinhalt	$V_a = 20 \text{ Mio m}^3$
— Fassungsvermögen	$V_{max} = 80 \text{ Mio m}^3$

<sup>4</sup> Dies entspricht den bei Hochdruckkraftwerken erzielbaren Wasserpreisen (Grössenordnung).

b) Entscheidungsvariable

— Sommerabflüsse	$O_s \text{ Mio m}^3$
— Winterabflüsse	$O_w \text{ Mio m}^3$

c) Einschränkungsfunktionen

— Einhaltung des Absenkeziels

$O_s \leq I_s + V_a$   
 also  $O_s \leq 120 \text{ Mio m}^3$

— Einhaltung des Stauziels

$O_s + O_w \leq I_s + I_w + V_a$   
 also  $O_s + O_w \leq 155 \text{ Mio m}^3$   
 $V_a + I_s - O_s \leq V_{max}$   
 also  $O_s \geq 40 \text{ Mio m}^3$   
 $V_a + I_s + I_w - O_s - O_w \leq V_{max}$   
 also  $O_s + O_w \geq 75 \text{ Mio m}^3$

— Nichtnegativität

$O_s \geq 0 \text{ Mio m}^3$   
 $O_w \geq 0 \text{ Mio m}^3$

d) Zielfunktion

— Maximiere den Jahresertrag

$Z = P_s O_s + P_w O_w$   
 also  $Z = 0,05 O_s + 0,2 O_w \text{ Mio Fr.}$

e) Lösung

Weil nur zwei Entscheidungsvariable vorhanden sind, umfasst der Raum der möglichen Lösungen die in Bild 3 dargestellte Ebene. In dieser grenzen die Einschränkungsfunktionen den Bereich der zulässigen Lösungen, also den Lösungsraum ein. Es handelt sich dabei um ein Vieleck ohne einspringende Ecken (konvexer Lösungsraum).

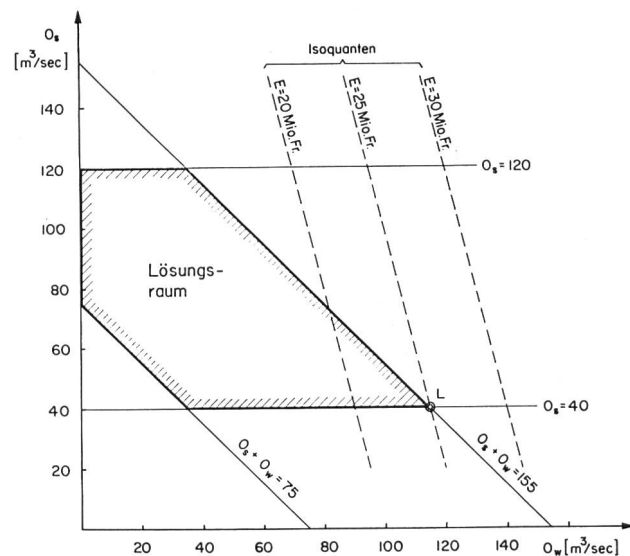


Bild 3 Graphische Lösung eines linearen Optimierungsproblems (didaktisches Beispiel: saisonweise Bewirtschaftung eines Einzweckspeichers).

Zeichnet man in die Ebene anhand der Zielfunktion eine Schar von Geraden mit

$Z = \text{konstant}$ ,

also gewissermassen die Linien gleichen Ertrags (Isoquanten) ein, so erkennt man sofort, dass die Ecke L des Lösungsraums dem optimalen Wertepaar von  $O_s$ ,  $O_w$  entspricht. Denn es gibt keinen Punkt des Lösungsraums, der auf einer höherwertigen Linie liegt.

Der Betreiber des Speichers muss folglich dem Verbraucher im Sommer  $O_s = 40$  Mio  $m^3$  und im Winter  $O_w = 115$  Mio  $m^3$  Wasser abgeben, wenn er den maximal möglichen Ertrag von 25 Mio Fr. erzielen will.

### 3. Dynamische Programmierung

#### 3.1 DAS VERFAHREN

Die dynamische Programmierung [4] ist nicht ein direktes Optimierungsverfahren — wie etwa die lineare Programmierung —, sondern eine Lösungsstrategie. Diese zielt darauf ab, ein Optimierungsproblem mit vielen Entscheidungsvariablen auf eine ganz bestimmte Art in viele Teilprobleme mit weniger Entscheidungsvariablen zu zerlegen. Die Teilprobleme sollen dann anhand bekannter Optimierungsverfahren behandelt und die entsprechenden Teillösungen zur Gesamtlösung zusammengesetzt werden.

Der Arbeitsaufwand für die dynamische Programmierung hängt stark von der Verknüpfung der Teilprobleme ab. Die folgenden Ausführungen setzen voraus, dass

- die Teilprobleme fortlaufende Entscheidungsstufen des Problems darstellen;
- jedes Teilproblem nur vom Zustand der vorangehenden Entscheidungsstufe abhängt (kein langes Gedächtnis);
- eine Lösung der Teilprobleme möglich ist.

Nicht zu den Voraussetzungen gehören aber Bedingungen betreffend Kontinuität oder gar Linearität der Ziel- und Einschränkungsfunktionen und Konvexität des Lösungsraums. Hierin und in der übersichtlichen Darstellung umfangreicher Aufgaben liegt die Stärke der dynamischen Programmierung.

#### 3.2 DIE OPTIMALE BEWIRTSCHAFTUNG EINES EINZWECKSPEICHERS BEI SAISON- UND MENGENABHÄNGIGEN PREISEN

Zur Verdeutlichung der dynamischen Programmierung wird nochmals das in Abschnitt 2.2 geschilderte Optimierungsproblem behandelt. Dabei wird allerdings angenommen, dass die Wasserpreise nicht nur vom Zeitpunkt der Wasserabgabe abhängen, sondern auch vom Umfang derselben. Gewöhnlich sinken ja die Preise mit zunehmendem Angebot.

Die Definition des Optimierungsproblems hinsichtlich Systemparameter, Entscheidungsvariablen, Einschränkungsfunktionen und Zielfunktion bleibt sich formal gleich. Nur ist zu ergänzen, dass die Wasserpreise Funktionen der Abflüsse sind und die Zielfunktion nichtlinear ist:

— Preis der monatlichen Abflüsse  
 $P_i = P_i(O_i)$  mit  $1 \leq i \leq 12$  Fr./ $m^3$

— Zielfunktion  $Z = \sum_{i=1}^{12} P_i O_i$  Fr.

Damit ist auch schon klargestellt, dass das Optimierungsproblem nicht mit linearer Programmierung gelöst werden kann. Hingegen gehorcht es den Voraussetzungen der dynamischen Programmierung. So kann es entspre-

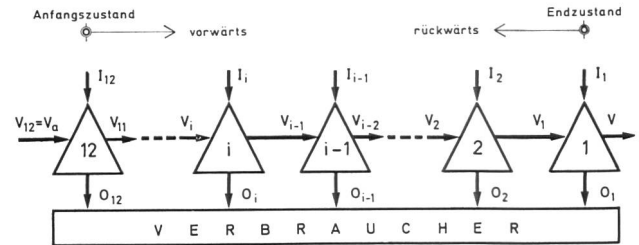


Bild 4 Optimierungsschema für einen Einzweckspeicher.

chend den 12 Monaten des betrachteten Jahres in 12 Teilprobleme zerlegt werden, wobei jedes Teilproblem den monatlichen Betrieb des Speichers betrifft und somit eine Entscheidungsstufe in einem fortlaufenden Entscheidungsprozess darstellt.

Um die Verknüpfung der Teilprobleme zu verdeutlichen, kann in Anlehnung an [5] folgender Kunstgriff eingeführt werden: Der Jahresspeicher mit den 12 monatlichen Abflüssen wird gemäss Bild 4 in 12 aneinandergereihte Monatspeicher mit je einem monatlichen Abfluss zerlegt. Jeder Monatspeicher wird gleichsam durch den Restbestand des vorangeschalteten Monatspeichers und durch den Monatszufluss gespeist. Dieser Restbestand des vorangeschalteten Monatspeichers ist selbstverständlich identisch mit dem Anfangsinhalt des betrachteten Monatspeichers; er wird deshalb als Zustandsgrösse oder Zustandsvariable dieses Speichers bezeichnet.

Betrachtet man nun beispielsweise den  $i$ -ten Monatspeicher, so ergibt die Wasserbilanz am Ende des Monats

$$V_{i-1} = V_i + I_i - O_i$$

Diese Gleichung — die sogenannte Zustandstransformationsgleichung — zeigt die Verknüpfung der Zustandsvariablen des Teilproblems  $i-1$  mit der Zustands- und der Entscheidungsvariablen des Teilproblems  $i$ .

In Übereinstimmung mit dem in Abschnitt 1.2 skizzierten allgemeinen Lösungsgang kann das Teilproblem demnach wie folgt formuliert und gelöst werden:

#### a) Systemparameter und Zustandsvariable

- Zufluss im Monat  $i$   $I_i$
- Preis des Abflusses im Monat  $i$   $P_i$
- Anfangsinhalt  $V_i$
- Fassungsvermögen  $V_{\max}$

#### b) Entscheidungsvariable

- Abfluss im Monat  $i$   $O_i$

#### c) Einschränkungsfunktionen

- Einhaltung des Absenkeziels  $O_i \leq I_i + V_i$
- Einhaltung des Stauziels  $V_i \leq V_{\max}$
- Nichtnegativität  $O_i \geq 0$

#### d) Zielfunktion

- Maximiere den Ertrag der Monatspeicher 1 bis  $i$   
 $z_i = P_i O_i + z_{i-1} \max(V_{i-1})$   
wobei mit der Zustandstransformationsgleichung  $V_{i-1} = V_i + I_i - O_i$  erreicht werden kann, dass die Zielfunktion  $z_i$  nur von der Entscheidungsvariablen  $O_i$  und der Zustandsvariablen  $V_i$  abhängt.

$$z_i = z_i(O_i, V_i)$$

Und diese Eigenschaft begründet die Anwendbarkeit der dynamischen Programmierung.

## e) Lösung

— Unter Festhaltung der Zustandsvariablen  $V_i$  wird die Zielfunktion anhand eines geeigneten Optimierungsverfahrens gelöst. Das Ergebnis ist ein optimaler Wert für den Ausfluss  $O_i$  und ein maximaler Wert der Zielfunktion  $z_i$  in Abhängigkeit der Zustandsvariablen  $V_i$ .

$$O_{i \text{ opt}} = O_{i \text{ opt}}(V_i)$$

$$z_{i \text{ max}} = z_{i \text{ max}}(V_i)$$

Der Lösungsgang des Teilproblems  $i$  steht für den Lösungsgang aller Teilprobleme, denn diese sind ja gleichartig.

Für die dynamische Programmierung ist nun kennzeichnend, dass die Berechnung an einem der beiden Enden der Reihe der Teilprobleme beginnt, zum andern führt und von dort wieder umkehrt. Dabei hängt es von der Problemstellung ab, ob vom Anfangs- oder vom Endzustand ausgegangen wird; in gewissen Fällen sind auch beide Berechnungsabläufe möglich. Im vorliegenden Beispiel wird, wie die Numerierung der Monatspeicher im Bild 4 andeutet, vom Endzustand aus rückwärts bis zum Anfangszustand, und dann wieder vorwärts bis zum Endzustand gerechnet.

### 1. Rückwärtsrechnung

Die Teilfunktion des ersten Teilproblems und die zugehörigen Restriktionen lauten:

$$z_1 = P_1 O_1$$

$$O_1 \leq I_1 + V_1$$

$$V_1 \leq V_{\text{max}}$$

$$O_1 \geq 0$$

Die Lösung wird nach irgendeinem Optimierungsverfahren gefunden und liefert

$$O_{1 \text{ opt}} = O_{1 \text{ opt}}(V_1)$$

$$z_{1 \text{ max}} = z_{1 \text{ max}}(V_1)$$

Dann wird das zweite Teilproblem mit der Zielfunktion

$$z_2 = P_2 O_2 + z_{1 \text{ max}}(V_1)$$

behandelt. Diese Zielfunktion wird zuerst anhand der Zustandstransformationsgleichung

$$V_1 = V_2 + I_2 - O_2$$

transformiert in

$$z_2 = P_2 O_2 + z_{1 \text{ max}}(V_2, O_2)$$

und anschliessend unter Berücksichtigung der Restriktionen analog zum Teilproblem 1 gelöst. Das Ergebnis ist

$$O_{2 \text{ opt}} = O_{2 \text{ opt}}(V_2)$$

$$z_{2 \text{ max}} = z_{2 \text{ max}}(V_2)$$

Auf ähnliche Weise werden auch die folgenden Teilprobleme gelöst bis man für das zwölfte Teilproblem erhält

$$V_{11} = V_{12} + I_{12} - O_{12}$$

$$O_{12 \text{ opt}} = O_{12 \text{ opt}}(V_{12})$$

$$z_{12 \text{ max}} = z_{12 \text{ max}}(V_{12})$$

Nun ist aber  $V_{12}$  als Anfangszustand bekannt. Es gilt

$$V_{12} = V_0,$$

so dass sowohl der optimale Entscheid  $O_{12 \text{ opt}}$  wie das Maximum der Zielfunktion des 12. Teilproblems bestimmt werden können. Und dieses Maximum ist definitionsgemäss identisch mit dem Maximum der Zielfunktion des Gesamtproblems

$$Z_{\text{max}} = z_{12 \text{ max}}$$

### 2. Vorwärtsrechnung

In der Vorwärtsrechnung interessieren nur noch die Werte der übrigen optimalen Entscheide. Die Maxima der übrigen Zielfunktionen sind irrelevant. Mit den bekannten Werten  $V_{12}$  und  $O_{12 \text{ opt}}$  des 12. Teilproblems ermittelt man

— anhand der Zustandstransformationsgleichung

$$V_{11} = V_{12} + I_{12} - O_{12 \text{ opt}}$$

— auf einfache Weise den Zustand  $V_{11}$  des 11. Teilproblems und aus diesem den optimalen Entscheid  $O_{11 \text{ opt}}$  usw. Schliesslich bestimmt man den Zustand  $V_1$  und den optimalen Entscheid  $O_{1 \text{ opt}}$  des ersten Teilproblems und erreicht den Endzustand

$$V = V_1 + I_1 - O_{1 \text{ opt}}$$

Damit ist die Lösung des Gesamtproblems — bestehend aus den optimalen monatlichen Ausflüssen (Abgaben an den Verbraucher) und dem entsprechenden maximalen Ertrag — gefunden:

— Optimale monatliche Ausflüsse  $O_{1 \text{ opt}}, O_{2 \text{ opt}}, \dots, O_{12 \text{ opt}}$   
 — Maximaler Ertrag  $Z_{\text{max}}$

### 3.3 DIDAKTISCHES ZAHLENBEISPIEL

Die Methodik der dynamischen Programmierung erscheint noch einleuchtender, wenn folgendes Zahlenbeispiel behandelt wird:

Grundsätzlich wird der gleiche Einzweckspeicher betrachtet wie im vorangehenden Abschnitt. Vereinfachend wird aber angenommen, dass der Betrieb nur quartalsweise interessiere und bloss fünf Abgabemöglichkeiten umfasse, nämlich eine Ausnützung der Abflusskapazität (begrenzt durch die Ausbaugrösse der Anlagen) zu 0, 25, 50, 75 oder 100%. Im übrigen sei das Optimierungsproblem — wie es sich für ein Hochdruckspeicherwerk stellen könnte — konkret definiert durch

#### a) Systemparameter

(es wird ein Jahr betrachtet, das am 1. April beginnt)

— Quartalszuflüsse

$$I_1 = 65 \quad I_2 = 40 \quad I_3 = 20 \quad I_4 = 10 \quad \text{Mio m}^3$$

— Ertrag der Quartalsabflüsse (tabellarisch als Funktion  $E_i = E_i [O_i]$ )

für	$O_1 = 10$	$O_2 = 20$	$O_3 = 30$	$O_4 = 40$	Mio m <sup>3</sup>
1. Quartal	$E_1 = 0,8$	1,2	1,6	1,8	Mio Fr.
2. Quartal	$E_2 = 1,0$	1,5	2	2,5	Mio Fr.
3. Quartal	$E_3 = 1,6$	2,4	3,2	3,7	Mio Fr.
4. Quartal	$E_4 = 2$	3	4	4,6	Mio Fr.

— Anfangsinhalt  $V_a = 0$  Mio m<sup>3</sup>  
 — Fassungsvermögen  $V_{\text{max}} = 60$  Mio m<sup>3</sup>  
 — Abflusskapazität  $O_{\text{max}} = 40$  Mio m<sup>3</sup>  
 (pro Quartal ausgedrückt)

#### b) Entscheidungsvariable

— Quartalsabflüsse (-abgabe)

$$O_1 \quad O_2 \quad O_3 \quad O_4 \quad \text{Mio m}^3$$

#### c) Einschränkungsfunktionen

— Einhaltung des Absenkeziels

$$\begin{aligned} \text{nach dem 1. Quartal} & \quad O_1 \leq 65 \quad \text{Mio m}^3 \\ \text{nach dem 2. Quartal} & \quad O_1 + O_2 \leq 105 \\ \text{nach dem 3. Quartal} & \quad O_1 + O_2 + O_3 \leq 125 \\ \text{nach dem 4. Quartal} & \quad O_1 + O_2 + O_3 + O_4 \leq 135 \end{aligned}$$

— Einhaltung des Stauziels

$$\begin{aligned} \text{nach dem 1. Quartal} & \quad O_1 \geq 5 \quad \text{Mio m}^3 \\ \text{nach dem 2. Quartal} & \quad O_1 + O_2 \geq 45 \\ \text{nach dem 3. Quartal} & \quad O_1 + O_2 + O_3 \geq 65 \\ \text{nach dem 4. Quartal} & \quad O_1 + O_2 + O_3 + O_4 \geq 75 \end{aligned}$$

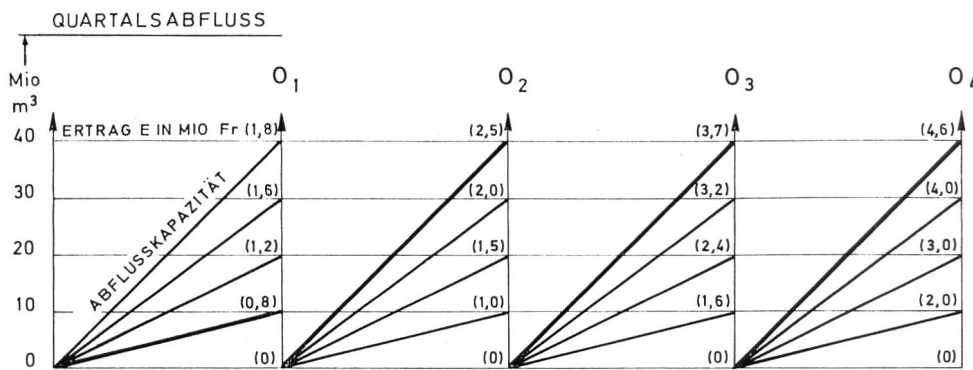
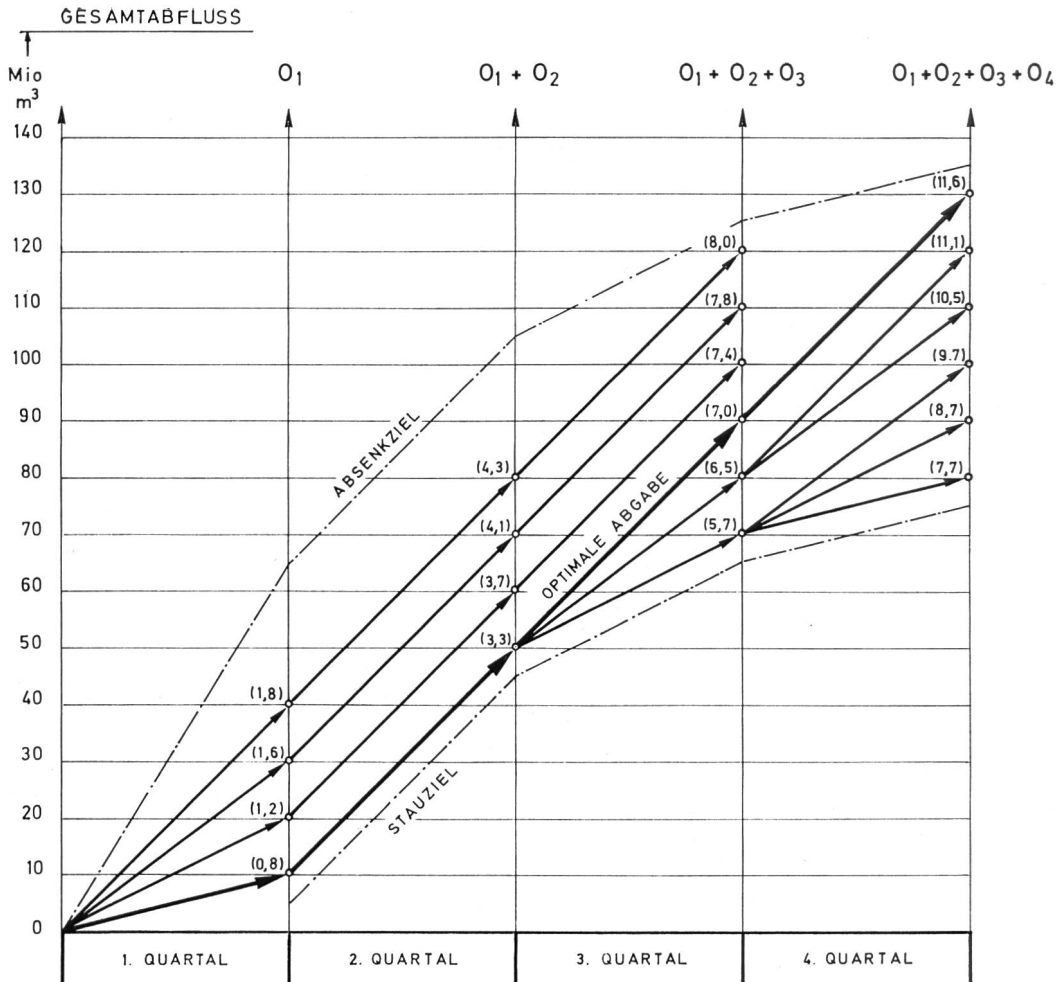


Bild 5 Graphische Lösung eines mit dynamischer Programmierung behandelten Optimierungsproblems (didaktisches Beispiel: quartalsweise Bewirtschaftung eines Einzweckspeichers).

— Berücksichtigung der Abflusskapazität  
 $O_1 \leq 40$   $O_2 \leq 40$   $O_3 \leq 40$   $O_4 \leq 40$  Mio  $m^3$

— Nichtnegativität  
 $O_1 \geq 0$   $O_2 \geq 0$   $O_3 \geq 0$   $O_4 \geq 0$  Mio  $m^3$

d) Zielfunktion  
 Maximiere den Jahresertrag  
 $Z = E_1(O_1) + E_2(O_2) + E_3(O_3) + E_4(O_4)$  Mio Fr.

e) Lösung  
 Entsprechend der eingeführten Vereinfachung können die Entscheidungsvariablen je die fünf Werte 0, 10, 20, 30, 40 Mio  $m^3$  annehmen. Diese Werte werden in Bild 5

(untere Hälfte) quartalsweise durch fünf Pfeile dargestellt, deren Spitzen mit den zugehörigen quartalsweisen Erträgen angeschrieben sind. Für das 1. Quartal gilt beispielsweise

— Quartalsabfluss  $O_1 = 0, 10, 20, 30, 40$  Mio  $m^3$   
 — Zugehöriger Ertrag  $E_1 = 0, 0,8, 1,2, 1,6, 1,8$  Mio Fr.

Und aus diesen fünf Optionen des 1. Quartals ist die optimale auszuwählen, usw.

Im Sinne der dynamischen Programmierung wird das Optimierungsproblem also in vier Teilprobleme aufgeteilt: Zuerst wird nach dem optimalen quartalsweisen Betrieb gefragt, um dann daraus den optimalen Jahres-

betrieb zusammensetzen. Der Ablauf der Berechnung kann — in Analogie zu einem Vorschlag von [6] für ein anderes Problem — graphisch in Bild 5 (obere Hälfte) verfolgt werden. Diesmal erfolgt die Vorwärtsrechnung vor der Rückwärtsrechnung.

### 1. Vorwärtsrechnung

Der Anfangszustand ist mit dem Anfangsinhalt von 0 Mio m<sup>3</sup> gegeben und lässt im 1. Quartal grundsätzlich die Wahl von fünf Optionen offen. Die Beachtung der Einschränkungen zeigt aber, dass die Option O<sub>1</sub> = 0 unzulässig ist, weil sie zu einer Ueberschreitung des Stauziels führt. Demzufolge sind vier Optionen zulässig, die zu folgenden (maximalen) Erträgen führen:

$$V_1 = 0 \quad \text{Mio m}^3$$

$$O_{1 \text{ opt}} = 10, 20, 30, 40 \text{ Mio m}^3$$

$$z_{1 \text{ max}} = 0.8, 1.2, 1.6, 1.8 \text{ Mio Fr.}$$

Die vier entsprechenden Pfeile in Bild 5 (obere Hälfte) bezeichnen vier mögliche Anfangszustände — und damit Zustandsgrößen V — des 2. Quartals. Auf diesen können grundsätzlich wiederum je fünf Optionen — also insgesamt 20 Optionen — aufgebaut werden. Davon scheidet zehn aus, weil sie sich mit der Einschränkung betreffend Stauziel nicht vertragen. Und durch Probieren stellt man fest, dass unter den verbleibenden zehn nur folgende vier optimal sind:

$$V_2 = 10, 20, 30, 40 \text{ Mio m}^3$$

$$O_{2 \text{ opt}} = 40, 40, 40, 40 \text{ Mio m}^3$$

$$z_{2 \text{ max}} = 3.3, 3.7, 4.1, 4.3 \text{ Mio Fr.}$$

Die vier entsprechenden Pfeile bezeichnen wiederum vier mögliche Anfangszustände des 3. Quartals. Von diesen ausgehend lassen sich auf analoge Weise sechs optimale Optionen finden:

$$V_3 = 50, 60, 70, 80 \text{ Mio m}^3$$

$$O_{3 \text{ opt}} = 20, 30, 40, 40, 40, 40 \text{ Mio m}^3$$

$$z_{3 \text{ max}} = 5.7, 6.5, 7.0, 7.4, 7.8, 8.0 \text{ Mio Fr.}$$

Schliesslich erhält man für das 4. Quartal die sechs optimalen Optionen, die zum Endergebnis führen:

$$V_4 = 70, 80, 80, 90 \text{ Mio m}^3$$

$$O_{4 \text{ opt}} = 10, 20, 30, 30, 40, 40 \text{ Mio m}^3$$

$$z_{4 \text{ max}} = 7.7, 8.7, 9.7, 10.5, 11.1, 11.6 \text{ Mio Fr.}$$

Definitionsgemäss stellt das Maximum dieses letzten Teilproblems auch dasjenige des gesamten Problems dar. Der maximal erzielbare Jahresertrag ist

$$z_{\text{max}} = z_{4 \text{ max}} = 11,6 \text{ Mio Fr.}$$

### 2. Rückwärtsrechnung

Bild 5 (obere Hälfte) zeigt nun unmittelbar, wie die optimalen Abflüsse — und damit die Entscheide — in den vier Quartalen gefunden werden können. Es geht einfach darum, die zum Erfolg führenden Pfeile vom Endzustand zum Anfangszustand zurückzuverfolgen:

$$O_{4 \text{ opt}} = 40, O_{3 \text{ opt}} = 40, O_{2 \text{ opt}} = 40, O_{1 \text{ opt}} = 10 \text{ Mio m}^3$$

Würden die eingangs angenommenen Vereinfachungen weggelassen, so könnte das Optimierungsproblem — bei entsprechend grösserem Aufwand — in analoger Weise gelöst werden. Anstelle des quartalsweisen Betriebs liesse sich beispielsweise der wöchentliche berücksichtigen und anstelle der fünf Abgabemöglichkeiten, deren 50 (oder eine kontinuierliche Abgabefunktion). Die graphische Verfolgung des Lösungsganges gemäss Bild 5 wäre grundsätzlich immer noch möglich; die eigentliche Problemlösung müsste

aber aus Zeitgründen auf einem Computer vorgenommen werden.

Die Darstellung von Bild 5 (obere Hälfte) ist insofern interessant, als sie die Speicherbewirtschaftung anhand der — allen Praktikern vertrauten — Summenkurven erhellt. Die das Absenkenziel markierende Linie ist nämlich nichts anderes als die Summenkurve der gegebenen Zuflüsse (einschliesslich dem Anfangsvolumen), und die Sequenz der zum Erfolg führenden Pfeile, die Summenkurve der optimalen Abflüsse. Der grösste Abstand dieser Summenkurven entspricht dabei dem benötigten Speicherinhalt — im vorliegenden Beispiel von Bild 5 also 55 Mio m<sup>3</sup>. Und dieser Speicherinhalt darf selbstverständlich nicht grösser sein, als der verfügbare Speicherinhalt (Fassungsvermögen) — das heisst 60 Mio m<sup>3</sup> —, was die das Stauziel markierende Linie veranschaulicht.

### 3.4 WEITERE BEISPIELE

Um das Wesen der dynamischen Programmierung aufzuzeigen, werden in den Abschnitten 3.2 und 3.3 besonders einfache Optimierungsprobleme betrachtet. Mit der dynamischen Programmierung lassen sich jedoch auch wesentlich kompliziertere Speicherbewirtschaftungsprobleme lösen.

So können bei den Systemparametern und Zustandsgrößen beispielsweise ausser den zeitlich schwankenden Zuflüssen noch die Verdunstungs- und Versickerungsverluste im Speichersee berücksichtigt werden. Oder es können anstelle deterministischer hydrologischer Grössen stochastische in Betracht gezogen werden. Ebenso ist es möglich, neben den bereits erwähnten Einschränkungen noch eine ganze Reihe von weiteren betreffend Niedrigwassergarantie und Hochwasserschutz usw. einzuführen. Und schliesslich braucht das System nicht auf einen Einzweckspeicher beschränkt zu bleiben, sondern kann auf einen Verbund von mehreren Mehrzweckspeichern ausgedehnt werden. Dementsprechend sind dann selbstverständlich kombinierte Zielfunktionen zu verwenden.

An der Versuchsanstalt für Wasserbau, Hydrologie und Glaziologie der ETHZ (VAW) wurde beispielsweise ein Computerprogramm für folgendes Optimierungsproblem entwickelt: An zwei parallelen Flüssen besteht je ein Speichersee, dessen Ausfluss zuerst in einer Wasserkraftanlage und dann in einem Siedlungsgebiet (Trink-, Brauch- und Kühlwasserversorgung, Bewässerung) genutzt wird. Unterwegs soll dieser Ausfluss einen minimalen Wert nicht unterschreiten (Niedrigwassergarantie, Pflichtwasser) und einen maximalen Wert nicht überschreiten (Hochwasserschutz). Die Verquickung der beiden Speicherseen ist insofern gegeben, als ihre Wasserkraftanlagen das gleiche Stromversorgungsgebiet bedienen (Bild 6). Gefragt ist nach der gemeinsamen Bewirtschaftung dieser Speicherseen zur

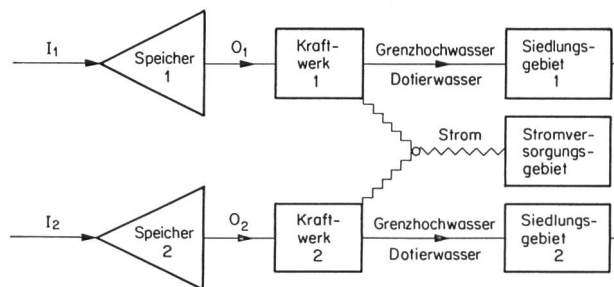


Bild 6 Schema zweier paralleler Mehrzweckspeicher.



Erzielung eines maximalen Ertrages aus dem Stromverkauf bei gegebenem Wasserverbrauch auch im Siedlungsgebiet. Die Optimierung erfolgt anhand der Methode der dynamischen Programmierung.

#### 4. Weitere Verfahren

##### 4.1 ÜBERGANG VON DETERMINISTISCHEN AUF STOCHASTISCHE MODELLE

In den vorangehenden Abschnitten werden die Speicherseen durch deterministische Modelle beschrieben. Das heisst, die Parameter der Speicherbewirtschaftungsprobleme werden als Grössen behandelt, die eindeutig sind und folglich einen sicheren Entscheid ermöglichen.

Nun handelt es sich bei diesen Grössen aber unter anderem um hydrologische Werte, die im Zeitpunkt des Entscheides teilweise als Messwerte vorliegen und teilweise vorausgesagt werden müssen. Selbstverständlich sind sowohl diese Messwerte wie insbesondere die Prognosen mit gewissen Unsicherheiten behaftet, die sich auf die Entscheidungssituation übertragen. Aehnliches lässt sich auch in bezug auf die Grössen sagen, welche die Marktverhältnisse (Wasserpreise usw.) kennzeichnen.

Um dieser Entscheidungssituation Rechnung zu tragen, können die Speicherseen durch sogenannte stochastische Modelle beschrieben werden. Die zugehörigen Parameter sind dann nicht mehr eindeutige Grössen, sondern stochastische Variablen. Und zur Lösung der Speicherbewirtschaftungsprobleme gelangen Optimierungsverfahren zur Anwendung, die mit der Wahrscheinlichkeitstheorie verknüpft sind. An solchen stehen etwa die stochastische lineare Programmierung oder die stochastische dynamische Programmierung zur Verfügung, als Anpassungen der in Abschnitt 2.1 und 3.1 beschriebenen Verfahren für stochastische Ziel- und Einschränkungsfunktionen. Daneben gibt es aber noch andere Verfahren, die — wie die Lagerhaltungstheorie und die Warteschlangentheorie — eigens für die beschriebene Entscheidungssituation entwickelt wurden.

Die Lagerhaltungstheorie befasst sich grundsätzlich mit der Frage nach der optimalen Lagerbewirt-

schaftung bei gegebenen Lager-, Bestell- und Fehlbestandskosten. Sie behandelt also ein Problem, das mit demjenigen der Speicherbewirtschaftung eng verwandt ist. Deshalb lässt sie sich in einigen Fällen nutzbringend anwenden.

Auch die Warteschlangentheorie ermöglicht einige interessante Einblicke in das Speicherverhalten. Denn sie behandelt Vorgänge, wie sie bei der Kundenabfertigung an einem Schalter usw. auftreten. Und es kann gezeigt werden, dass zwischen dem Warteraum (der auf Abfertigung wartenden Kunden) und einem Speicher gewisse Analogien bestehen: Gemäss Bild 7 entsprechen sich

- die zufallsbedingt ankommenden Kunden und die Speicherzuflüsse
- der Warteraum und der Speicher
- die Warteschlange und die Speicherfüllung
- die Kundenabfertigung (Bedienung) und die Speicherbewirtschaftung
- die abgefertigten (abgehenden) Kunden und die Speicherabflüsse (Wasserabgabe).

##### 4.2 SIMULATION

Die Simulation eines Systems — deterministischer oder stochastischer Natur — dient dazu, dessen Auswirkungen unter der Voraussetzung konkreter Entscheide zu ermitteln. Und wenn diese Voraussetzung variiert wird, so erlaubt der Vergleich der Auswirkungen Rückschlüsse auf die Entscheide und damit die Optimalität derselben.

Die Simulation ist also nicht ein unmittelbares Optimierungsverfahren. Denn sie geht in erster Linie von getroffenen oder angenommenen Entscheiden aus und führt zu den entsprechenden Folgen, statt umgekehrt.

Beim Problem der Speicherbewirtschaftung bedeutet dies, dass der Speicherbetrieb unter der Voraussetzung verschiedener Betriebsweisen simuliert wird, um den damit erzielbaren Nutzen zu ermitteln. Die Simulation kann dabei mittels eines Computerprogrammes oder eines geeigneten Gerätes geschehen. Als Ergebnis fällt eine Reihe voneinander zugeordneten Betriebsweisen und Nutzen an, aus der das Optimum ausgewählt werden kann.

Die Simulation entspricht also praktisch einem Variantenstudium und ist darum jedermann verständlich. Andererseits bedingt sie bei vielen Entscheidungsvariablen einen grossen Aufwand, weshalb sie gerade für Speicherbewirtschaftungsprobleme nur herangezogen wird, wenn die eigentlichen Optimierungsverfahren versagen.

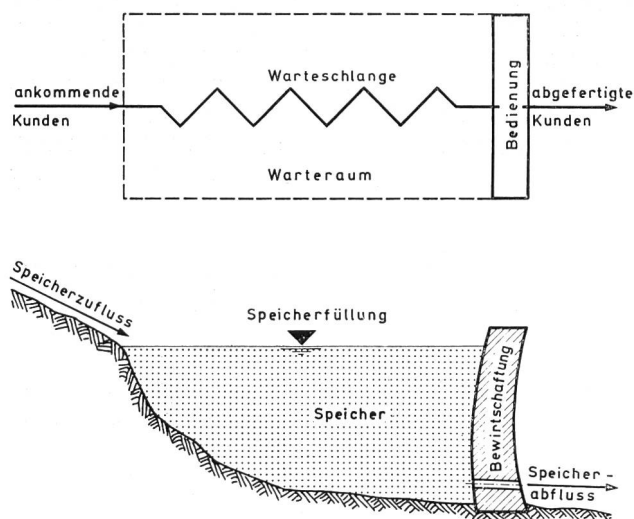


Bild 7 Analogie zwischen Warteschlangen- und Speicherproblem.

##### LITERATURNACHWEIS

- [1] Hall W. A., J. A. Dracup: Water Resources Systems Engineering Mc Graw Hill, New York, 1970
- [2] Dantzig G. B.: Lineare Programmierung und Erweiterung. Uebersetzt und bearbeitet von A. Jäger. Springer, Berlin etc., 1966
- [3] Chow V. T.: Handbook of Applied Hydrology; A Compendium of Water Resources Technology. Mc Graw Hill, New York, 1964
- [4] Bellman R. E. Dynamic Programming. Princeton University Press, Princeton, 1957
- [5] Plate E.: Die Anwendung des dynamischen Programmierens. 4. Fortbildungslehrgang für Hydrologie des DVWW, 1972
- [6] Onigkeit D., Kim Ch., Schmid B.: Optimal Design of an Irrigation System. Proceeding R6, Symposium of the International Commission on Irrigation and Drainage, Mexico City, 1969

Adresse der Verfasser:

Prof. Dr. Ing. D. Vischer,  
M. Spreafico, dipl. Ing.,  
Versuchsanstalt für Wasserbau,  
Hydrologie und Glaziologie/ETH,  
Gloriastrasse 37—39, 8006 Zürich.