

**Zeitschrift:** Wasser Energie Luft = Eau énergie air = Acqua energia aria  
**Band:** 88 (1996)  
**Heft:** 9

**Artikel:** Abschätzung der Stömungskräfte im Querprofil  
**Autor:** Beffa, Cornel  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-940367>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 15.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Abschätzung der Strömungskräfte im Querprofil

Cornel Beffa

## Zusammenfassung

Strömungskräfte in Querprofilen weichen je nach Gerinnegeometrie mehr oder minder vom Mittelwert ab, der gewöhnlich zur Dimensionierung verwendet wird. Der vorliegende Beitrag schlägt ein Berechnungsverfahren vor, das erlaubt, unter Normalabflussbedingungen die räumliche Verteilung der Strömungsgrößen abzuschätzen. Ein Vergleich mit gemessenen Wandschubspannungen bestätigt die Güte des Modells. Anwendungen für offene und geschlossene Profile zeigen den Einsatzbereich des Modells auf. Glatte und raue Profile sowie Profile mit variabler Rauigkeit können untersucht werden. Ferner liefert das Modell detaillierte Informationen über die Verteilung turbulenter Strömungsgrößen, welche in der Gewässerökologie eine wichtige Rolle spielen.

## Summary: Estimation of flow forces in cross-sections

Flow forces acting on the perimeter of a cross-section can differ markedly from mean values that are usually used for channel design. The paper presents a two-dimensional numerical model that gives detailed information of the distribution of the flow variables under uniform flow conditions. It uses the standard  $k$ -epsilon turbulence model and the log-law for bed friction. A comparison with measured bed shear stresses confirms the reliability of the model. The model can be applied to profiles of open channels and closed ducts with smooth or rough walls.

## 1. Einleitung

Wie gross sind die angreifenden Kräfte an der Böschung eines Trapezgerinnes? Welche maximalen Wandschubspannungen treten in einem Torbogenprofil auf? Bringt es etwas, die Ecken eines Rechteckkastens auszurunden?

Ansätze zur Dimensionierung offener und geschlossener Kanäle gehen üblicherweise von Mittelwerten für die Fliessgeschwindigkeit und die Wandschubspannung aus. Auf eine genauere Analyse lokaler Effekte wird bei dieser Mittelwerthydraulik verzichtet. Zur Beantwortung der eingangs gestellten Fragen reichen diese Betrachtungen allein jedoch nicht aus, da zusätzliche Informationen über die räumliche Verteilung der Strömungsgrößen nötig sind. Wie aber gelangt man mit vertretbarem Aufwand zu diesen Grössen?

Um die Problematik aufzuzeigen, betrachten wir ein langgestrecktes, prismatisches Gerinne. In diesem entspricht das Energiegefälle mit guter Näherung dem Sohlengefälle, d.h. es herrschen Normalabflussbedingungen. Sind die Abflussverhältnisse ungleichförmig, beispielsweise bei Aufweitungen und Verengungen, kann das Energiegefälle mittels Staukurvenrechnung bestimmt werden. Damit ist eine einfache und recht zuverlässige Abschätzung der Abflusskapazität und der mittleren Wandschubspannung möglich. Letztere erhält man aus der Beziehung

$$\tau_R = \rho g R J \quad (1)$$

(Vischer und Huber, 1993) mit  $\rho$  = Dichte der Flüssigkeit,  $g$  = Erdbeschleunigung,  $R$  = hydraulischer Radius und  $J$  = Energiegefälle. Zur Abschätzung der effektiven Strömungskräfte wären nähere Kenntnisse über die lokale Ver-

teilung der Wandschubspannung nützlich. Hydraulische Modellversuche, kombiniert mit moderner Messtechnik (z.B. Laser-Doppler-Anemometer), erlauben heute eine direkte Bestimmung der turbulenten Schubspannungen in Wandnähe. Der dazu nötige Aufwand lässt sich jedoch nur im Ausnahmefall rechtfertigen. Alternativ kann man versuchen, mittels Modellrechnungen zu einem besseren Verständnis zu gelangen. Für offene Gerinne bietet die Streifenmethode eine einfache Möglichkeit, lokale Grössen zu erhalten. Dazu wird der benetzte Querschnitt gedanklich in einzelne Streifen unterteilt, welche unabhängig voneinander zum Abfluss beitragen. Für einen Streifen mit der mittleren Abflusshöhe  $h$  und dem Böschungswinkel  $\alpha$  gilt dann

$$\tau_w = \rho g h \cos \alpha J \quad (2)$$

Diese Gleichung ist nicht mehr exakt, da hier die turbulenten Schubspannungen in Querrichtung vernachlässigt werden. Für manche Profile ist das zulässig, beispielsweise an breiten Flüssen wie dem Hochrhein. Wir bezeichnen diese deshalb als *hydraulisch weit*. Für enge Profile gilt der Ansatz aber nicht, wie auch die folgende Abschätzung zeigt. Im Halbkreisprofil mit Radius  $r$  entspricht die lokale Wandschubspannung aus Symmetriegründen mit guter Näherung der mittleren Wandschubspannung gemäss Gleichung (1) mit dem hydraulischen Radius  $R = r/2$ . Gleichung (2) liefert unter denselben Bedingungen in Profilmitteln mit  $h = r$  einen doppelt so hohen Wert, und am Rand resultiert entsprechend ein zu kleiner Wert. Gleichung (2) führt also für das Kreisprofil – und wie wir noch sehen werden auch für das Dreiecks- und Trapezprofil – zu einer starken Unterschätzung der Strömungskräfte am Profilrand. Verbesserungen am Streifenmodell sind möglich durch Berücksichtigung der turbulenten Schubspannungen (Beffa, 1994). In diesem Beitrag wird nun ein zweidimensionales Modell vorgestellt, das sich gleichermassen für offene und geschlossene Gerinne eignet. Mit verhältnismässig geringem Aufwand erlaubt dieses Modell die Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung und des Verlaufs der Wandschubspannungen für Profile mit beliebiger Form.

## 2. Strömungsgleichung für Normalabfluss

Die Gleichung zur Beschreibung der eindimensionalen, stationären Gerinneströmung lässt sich aus den Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen herleiten. Unter Vernachlässigung der viskosen Spannungen lautet die Impulsbilanz in Strömungsrichtung ( $x$ -Achse) für eindimensionalen Abfluss

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

mit den kartesischen Koordinaten  $x, y, z$ , den turbulenten Schubspannungen  $\tau_{xy}, \tau_{xz}$  und dem hydrostatischen Druck  $p$ . Die turbulenten Spannungen lassen sich nach dem Ansatz von Boussinesq als Funktion der Gradienten der Fliessgeschwindigkeit  $u$  ausdrücken. Wird weiter vorausgesetzt, dass der Druckgradient proportional zum Energiegefälle ist, führt dies auf die Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \rho \nu_t \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho \nu_t \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \rho g J = 0 \quad (4)$$

Mit der Wirbelviskosität  $\nu_t$  tritt in Gleichung (4) eine neue Unbekannte auf. Für Grenzschichtströmungen, und um einen solchen Strömungstyp handelt es sich hier, hat sich das  $k$ - $\epsilon$ -Modell bewährt. Es basiert auf Dimensionsbetrachtungen und lautet

$$\nu_t = c_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (5)$$

(Rodi, 1984) mit der kinetische Energie der turbulenten Schwankungsbewegung  $k$ , der Dissipationsrate  $\epsilon$  und einem Proportionalitätskoeffizienten  $c_k$ . Für beide Grössen  $k$  und  $\epsilon$  sind zusätzliche Erhaltungsgleichungen zu lösen, welche eine ähnliche Form haben wie Gleichung (4). Weitere Details zum Modell und Angaben über dessen Gültigkeitsbereich finden sich in Rodi, 1984.

Wichtig ist im weiteren die korrekte Behandlung der Modellränder. Die Reibungsverluste am Gerinneumfang können für glatte und raue Wände mittels dem bekannten logarithmischen Geschwindigkeitsgesetz abgeschätzt werden (Schlichting, 1982). Damit lässt sich die Berechnung der laminaren Unterschicht umgehen und der Rechenaufwand reduzieren. Eine weitere Randbedingung stellt die freie Oberfläche dar, wo die turbulenten Spannungen auf Null zurückgehen. Beim Wegfall äusserer Kräfte (z.B. Windlasten) ist diese Ebene überhaupt frei von Spannungen und kann deshalb näherungsweise als Symmetrieebene aufgefasst werden. Genau genommen ist die Situation sehr viel komplizierter: Durch die Abnahme der turbulenten Längenskala an der freien Oberfläche werden Sekundärströmungen angeregt. Diese Strömungen normal zur Hauptströmungsrichtung führen beispielsweise dazu, dass in engen Profilen der Ort des Geschwindigkeitsmaximums unter die freie Oberfläche gedrückt wird. Die Details all der ablaufenden Prozesse sind bis heute nicht abschliessend geklärt (Rhodes und Knight, 1994). In der Regel, dies zeigt sich auch in den Anwendungen in Abschnitt 4, bleibt der Einfluss der Sekundärströmungen auf die Verteilung der Fließgeschwindigkeiten und Wandschubspannungen bescheiden. Sekundärströmungen treten aber nicht nur in offenen Gerinnen, sondern auch in geschlossenen Profilen auf, beispielsweise in den Ecken eines Rechteckkastens.

### 3. Numerische Lösung der Strömungsgleichung

Da eine direkte Lösung der nichtlinearen Strömungsgleichung (4) nicht möglich ist, wird ein numerisches Verfahren verwendet. Zur Diskretisierung benutzen wir ein regelmässiges Rechteckgitter (Bild 1). Unter Verwendung zentraler finiter Differenzen lässt sich die Strömungsgleichung (4) schreiben zu

$$\left[ v_{i+1/2,j} \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta y} - v_{i-1/2,j} \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta y} \right] \Delta z + \left[ v_{i,j+1/2} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta z} - v_{i,j-1/2} \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta z} \right] \Delta y + gJ\Delta y \Delta z - u^*_{i,j} \Delta l_{i,j} = 0 \quad (6)$$

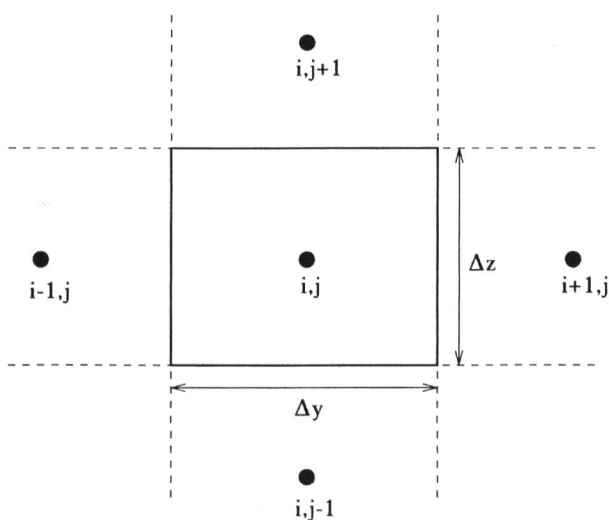


Bild 1. Finites Differenzennetz mit Anordnung und Bezeichnung der diskreten Gitterpunkte.

Es handelt sich dabei um ein eigentliches Standardverfahren zur Diskretisierung parabolischer Gleichungen (siehe beispielsweise Patankar, 1980). Erklärung bedarf der letzte Term auf der linken Seite von Gleichung (6), welcher den Einfluss der Wandreibung beschreibt.  $\Delta l_{i,j}$  entspricht dabei der Länge des Wandanteiles in Gitterzelle  $i, j$  und ist nur für Randzellen von Null verschieden. Zur Ermittlung der Reibungsgeschwindigkeit  $u^*$  wird das logarithmische Geschwindigkeitsgesetz verwendet. Ähnliche diskrete Gleichungen ergeben sich auch für die turbulenten Grössen  $\kappa$  und  $\epsilon$ .

Gelöst werden die Gleichungen mit dem Gauss-Seidel-Verfahren (Hirsch, 1988). Es handelt sich dabei um ein explizites Verfahren, wonach die Gleichungen für jeden Gitterpunkt separat gelöst werden. Dies im Gegensatz zu einem impliziten Verfahren, bei dem mehrere Gleichungen simultan gelöst werden. Der Vorteil der expliziten Verfahren liegt in der einfacheren Programmierung und dem geringeren Speicherbedarf. Dafür konvergieren sie langsamer, was zu einem erhöhten Rechenaufwand gegenüber den impliziten Verfahren führt.

Um eine Iterationsvorschrift zu erhalten, ersetzen wir die Unbekannte  $u_{i,j}$  in Gleichung (6) durch den Ausdruck  $u_{i,j} + \Delta u_{i,j}$  und bezeichnen  $\Delta u_{i,j}$  als die Verbesserung an  $u_{i,j}$ . Nach einigem Umformen und unter Beachtung, dass die Fließgeschwindigkeit quadratisch im Reibungsterm auftritt, erhält man für die Verbesserung

$$\Delta u_{i,j} = \frac{\text{linke Seite von Gleichung (6)}}{(v_{i+1/2,j} + v_{i-1/2,j}) \frac{\Delta z}{\Delta y} + (v_{i,j+1/2} + v_{i,j-1/2}) \frac{\Delta y}{\Delta z} + 2 \frac{u^*_{i,j}{}^2}{u_{i,j}} \Delta l_{i,j}} \quad (7)$$

Dieser Ausdruck ist solange verschieden von Null, wie Gleichung (6) nicht erfüllt ist. Der Ausdruck unter dem Bruchstrich kann aufgefasst werden als Mass für die Kopplung der Unbekannten mit der Strömungsgleichung. Gleichung (7) wird nun fortschreitend für alle Gitterzellen gelöst und die Verbesserung jeweils zum alten Schätzwert hinzugeschlagen. Dies wird solange wiederholt, bis Gleichung (6) genügend genau erfüllt ist.

### 4. Anwendung des Modells

Das eben beschriebene Verfahren wird zuerst für einige bekannte Fälle angewandt, um einen direkten Vergleich mit Messungen zu ermöglichen. Dazu werden publizierte Messergebnisse aus der Literatur verwendet. Zuverlässige Werte finden sich für das glatte Dreieckprofil (Meyer, 1971), für gegliederte Profile (Pasche, 1984) sowie für das Rechteck- und das Trapezgerinne (Tominaga et al., 1989). Für alle Berechnungsfälle wird dabei vorausgesetzt, dass die Strömung im voll-turbulenten Bereich liegt und somit viskose Effekte keinen Einfluss haben. In Bild 2 sind die Messungen für diese typischen Querprofilgeometrien dargestellt. Eingetragen sind auch die Resultate der in der Einleitung beschriebenen Streifenmethode. Die Abweichungen zu den Messungen sind offensichtlich, beispielsweise im Dreieckprofil: zu kleine Schubspannungen entlang der Böschungen und zu hohe Werte in Gerinnemitte. Recht gute Resultate liefert hingegen das 2D-Modell, das die Grössenordnung der Wandschubspannungen korrekt wiedergibt. Die grössten Abweichungen zwischen Messung und Rechnung sind an der Böschung zwischen Hauptgerinne und Vorland im gegliederten Profil festzustellen. Die Messungen zeigen hier einen grossen Schwankungsbereich, was möglicherweise auf den Einfluss von (instationären?) Sekundärströmungen zurückzuführen ist. Sekundärströmungen führen auch für die Messungen im Dreieckprofil zu lokalen Abweichungen vom symmetrischen Schubspan-

nungsverlauf. Ursache dafür sind der Einfluss der freien Oberfläche und die turbulenten Spannungen. Eine Berücksichtigung dieser Effekte wäre nur mit einem massiv aufwendigeren 3D-Modell möglich. Diese Art Modelle stellen jedoch vom Rechenaufwand her auch moderne Supercomputer an die Grenzen ihres Leistungsvermögens.

Das 2D-Modell kommt im Vergleich dazu mit sehr viel weniger Rechenzeit aus: Zur Lösung der Gleichungen auf einem Gitter mit  $100 \times 100$  Gitterpunkten benötigt ein PC (Intel Pentium 150 MHz) nur rund 5 Minuten. Auf einem so feinen Gitter mit einheitlicher Maschenweite von 2 mm sind einige weitere typische Querprofile gerechnet worden. Abgebildet in Bild 3 sind die Isolinien der Fließgeschwindigkeit und, an ausgewählten Punkten, die Werte der Wandschubspannung. Beide Angaben sind dimensionslos, wobei der Wert 1,0 der mittleren Fließgeschwindigkeit resp. der mittleren Wandschubspannung gemäss Gleichung (1) entspricht. Ausgehend vom Kreisprofil illustrieren die Bilder 3a und 3b die Resultate für einen Sohleinbau resp. bei Abfluss unter Teilfüllung. Bild 3c gibt die Situation im Halbkreisprofil wieder, und Bild 3d illustriert den Einfluss eines asymmetrischen Einbaus. Die lokalen Wandschubspannungen weichen vor allem für die vorspringende Ecke recht massiv vom Mittelwert ab. Das Torbogenprofil (Bild 3e) und das U-Profil (Bild 3f) beschreiben dieselbe Grundform. Durch die veränderten Randbedingungen ergeben sich, wie erwartet, völlig verschiedene Resultate. Typische Profilformen für offene Gerinne sind nochmals in den Bildern 3g und 3h abgebildet. Die Wandschubspannungen im Dreieckprofil sind minimal in Gerinnemitte und am Profilrand. Das Trapezprofil weist ein Minimum am Böschungsfuss auf. Höhere Werte für die Wandschubspannung finden

sich hingegen in Gerinnemitte. Schliesslich sind in Bild 3i und Bild 3j zwei Rechteckkasten dargestellt, einmal ohne und einmal mit Ausrundung der Gerinnecken. Der Einfluss auf das Geschwindigkeitsfeld ist nur gering, und auch die Abflusskapazität bleibt praktisch unverändert. Hingegen ergibt sich durch die Ausrundung der Ecken eine gleichmässigerere Verteilung der Schubspannungen entlang des Profulumfanges.

Alle hier vorgestellten Anwendungen sind für glatte Gerinne gerechnet worden. Die dargestellten Resultate gelten jedoch ohne Einschränkung auch für raue Gerinne. Anders ist die Situation, wenn, was in natürlichen Gerinnen häufig vorkommt, die Rauigkeit variabel ist. Gegenüber Profilen mit einheitlicher Rauigkeit ergeben sich an Orten mit grösseren Reibungsverlusten höhere Schubspannungen, und umgekehrt werden die Gebiete mit kleinerer Rauigkeit weniger beansprucht. Das vorgestellte Modell ist auch für solche Fälle in der Lage, das Fließfeld und die zu erwartenden Schubspannungen vorauszusagen.

## 5. Folgerungen

Der Vergleich zwischen gemessenen und gerechneten Werten für die Verteilung der Wandschubspannung in offenen Gerinnen zeigt:

- Die Streifenmethode eignet sich nicht für enge Profile.
- Das beschriebene 2D-Modell ist geeignet zur Bestimmung der Geschwindigkeits- und Wandschubspannungsverteilung in offenen und geschlossenen Profilen von beliebiger Form.
- Sekundärströmungen können lokal zu Abweichungen von den gerechneten Werten führen. Eine exakte Modellierung dieser Effekte wäre jedoch sehr aufwendig.

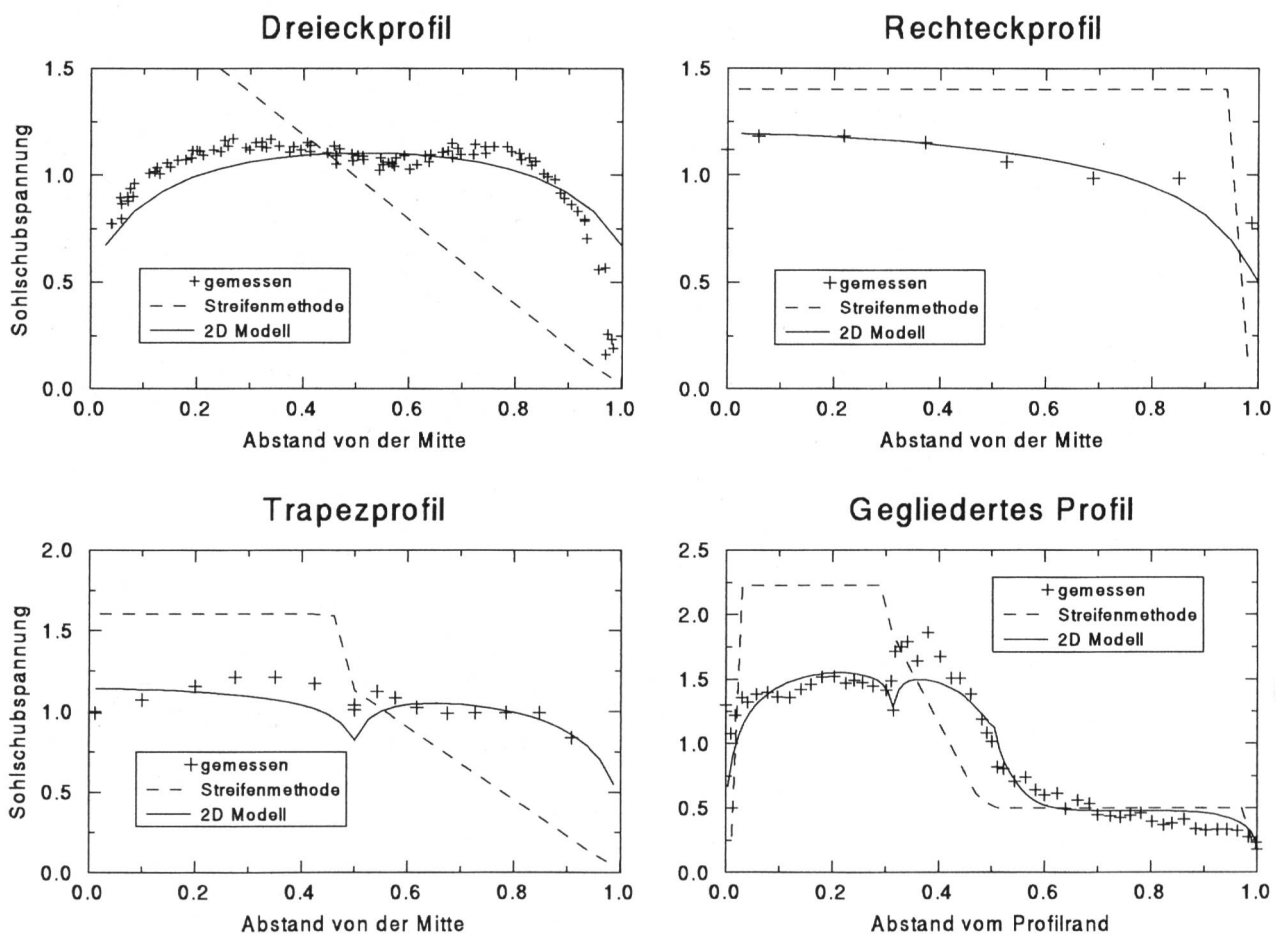


Bild 2. Vergleich zwischen gemessenen und berechneten Wandschubspannungen (dimensionslos) für verschiedene Querprofile: Dreieckprofil, Rechteckprofil, Trapezprofil und asymmetrisches Profil mit Vorland (Wert 1,0 entspricht der mittleren Wandschubspannung).

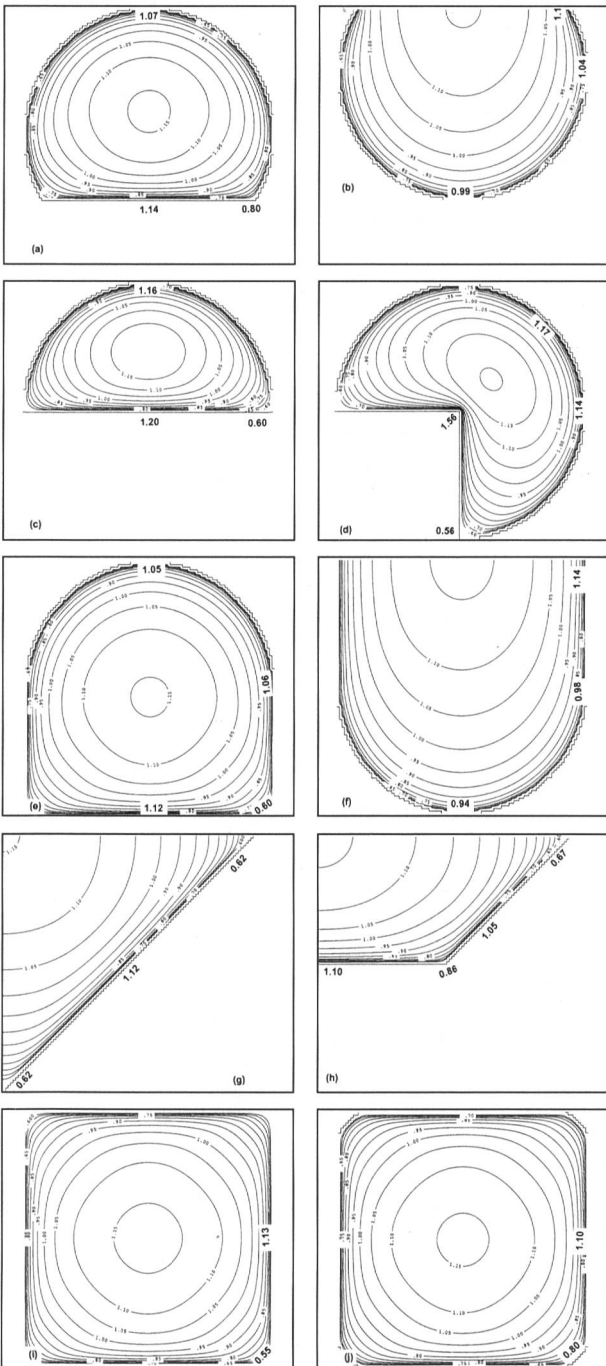


Bild 3. Isolinien der berechneten Fließgeschwindigkeit und lokale Wandschubspannungen (Zahlen, fett) für verschiedene Profile: (a) Kreisprofil mit Sohleneinbau, (b) Kreisprofil teilgefüllt, (c) Halbkreisprofil, (d) Kreisprofil mit Einbau, (e) Torbogenprofil, (f) U-Profil, (g) Dreieckprofil, (h) Trapezprofil, (i) Rechteckkasten, (j) Rechteckkasten mit ausgerundeten Ecken. Alle Größen sind dimensionslos (Wert 1,0 entspricht dem Mittelwert).

Dazu muss noch ergänzt werden, dass auch weitere Störeinflüsse (z.B. Rauigkeits- und Gefällswechsel, Gerinnekrümmungen usw.) zu zusätzlichen Abweichungen führen können.

Die vorgestellten Beispiele zeigen im weiteren:

- Maximal auftretende Fließgeschwindigkeiten erreichen selten das 1,2fache des Mittelwertes.
- Maximale Wandschubspannungen bleiben in der Regel unter dem 1,2fachen des Mittelwertes (Ausnahme: vorspringende Ecken).

- Minimale Wandschubspannungen vom 0,5fachen des Mittelwertes und darunter treten in Ecken mit kleinem Öffnungswinkel auf.
- Ausrunden der Profilecken führt zu einer gleichmässigeren Wandschubspannungsverteilung. Die Abflusskapazität wird dadurch kaum beeinflusst.

Neben den hier präsentierten Resultaten liefert das Modell auch detaillierte Angaben über weitere hydraulische Grössen, beispielsweise über die Verteilung der turbulenten Spannungen und der Wirbelviskosität. Diese Grössen sind nützlich zur Beurteilung von Transport- und Mischprozessen, welche beispielsweise in der Gewässerökologie einen wichtigen Platz einnehmen.

#### Verdankung

Das den Berechnungen zugrundeliegende 2D-Programm entstand während eines Aufenthalts am National Institute for Water and Atmospheric Research Ltd. (NIWA), Christchurch (NZ). Der Autor dankt den neuseeländischen Behörden für die finanzielle Unterstützung, welche diese Untersuchung ermöglicht hat.

#### Schrifttum

- Beffa, C.* 1994. Praktische Lösung der tiefengemittelten Flachwassergleichungen. Versuchsanstalt für Wasserbau, Hydrologie und Glaziologie, Mitteilung 133, ETH Zürich.
- Hirsch, C.* 1988. Numerical Computation of Internal and External Flows. Volume 1: Fundamentals of Numerical Discretization. Wiley, Chichester.
- Meyer, J.* 1971. Wandschubspannungs- und Geschwindigkeitsverteilung im glatten Dreiecksgerinne. Diss. Universität Berlin.
- Pasche, E.* 1984. Turbulenzmechanismen in naturnahen Fließgewässern und die Möglichkeit ihrer mathematischen Erfassung. Institut für Wasserbau und Wasserwirtschaft, Mitteilung 52, TH Aachen.
- Patankar, S. V.* 1980. Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. Hemisphere Publ. Corp., New York.
- Rhodes, D. G., D. W. Knight* 1994. Distribution of Shear Force on Boundary of Smooth Rectangular Duct. J. Hydr. Engr., ASCE, Vol. 120 (7).
- Rodi, W.* 1984. Turbulence Models and their Application in Hydraulics – A State-of-the-Art Review. 2nd rev. ed., IAHR Book Publication, Delft.
- Schlichting, H.* 1982. Grenzschicht-Theorie. 8. Auflage, G. Braun, Karlsruhe.
- Tominaga, A., I. Nezu, E. Kazuhiro, H. Nakagawa* 1989. Three-dimensional turbulent structure in straight open channel flows. J. Hydr. Res., IAHR, Vol. 27 (1).
- Vischer, D., A. Huber* 1993. Wasserbau. Springer, Berlin.

Adresse des Verfassers: *Cornel Beffa*, dipl. Kulturing. ETH, Dr. sc. techn., c/o Bigler AG Ingenieure und Planer, Postfach 43, CH-6431 Schwyz.