Zeitschrift: Wasser Energie Luft = Eau énergie air = Acqua energia aria
Herausgeber: Schweizerischer Wasserwirtschaftsverband
Band: 101 (2009)
Heft: 4

Artikel: Beschreibung turbulenter Strömungen
Autor: Heller, Valentin
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-941966

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Beschreibung turbulenter Strömungen

■ Valentin Heller

Zusammenfassung

Dieser Artikel gibt eine Einführung zur analytischen, experimentellen und numerischen Beschreibung turbulenter Strömungen. Er zeigt ihre wichtigsten Eigenschaften auf und veranschaulicht ihre Bedeutung. Das Gleichungssystem rund um die Navier-Stokes-Gleichungen wird angeschnitten, welches eine vollständige Beschreibung turbulenter Strömungen erlaubt. Es ist jedoch nur in einfachen Fällen lösbar. Daher werden ebenfalls ihre Vereinfachungen, die Reynolds-Gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen, beschrieben, welche zeitliche Mittelwerte der Unbekannten liefern. Turbulenzeigenschaften wie die Kolmogorovlänge wurden in der homogenen Turbulenz zur universellen Beschreibung von Turbulenzeigenschaften, unabhängig von der spezifischen Geometrie eines Problems, gefunden. Experimentelle Techniken zur Charakterisierung von turbulenten Strömungen lassen sich in Punktmessungs- und Strömungsvisualisierungstechniken einteilen, wobei die Funktionsweisen der wichtigsten Systeme erläutert werden. Fünf wichtige numerische Methoden zur Behandlung von turbulenten Strömungen werden aufgegriffen, und der Zweck von Turbulenzmodellen wird erläutert. Die in diesem Artikel beschriebenen Phänomene sind schliesslich in Bild 11 zusammengefasst und zeitlich eingeordnet.

Abstract

This article introduces the analytical, experimental and numerical description of turbulent flows. It highlights both its most important features and relevance. The equation system regarding the Navier-Stokes equations is mentioned, allowing turbulent flows to be described completely. Unfortunately, it is only resolvable in simplified cases. Therefore, their simplifications, namely the Reynolds-Averaged Navier-Stokes equations, are also described, resulting in timely mean values of the unknowns. Turbulent features such as the Kolmogorov microscale were found in the homogeneous turbulence describing universal turbulence features, independent of a specific geometry of a problem. Experimental techniques to characterise turbulent flows are categorised in point measurement and flow visualisation techniques, whereby the principles of the most important systems are introduced. Five important numerical methods covering turbulent flows are introduced and the purpose of turbulence models is highlighted. The phenomena described herein are finally summarised and ranked by time in Figure 11.

1. Einleitung

1.1 Turbulente Strömung

Bild 1 zeigt eine turbulente Wasserströmung oberhalb des Rheinfalls bei der Gemeinde Neuhausen am Rheinfall. Das Bild könnte mit einer Aufnahme der Erdatmosphäre oder eines Ozeans verwechselt werden. Alle diese Phänomene scheinen völlig chaotische und gleichzeitig faszinierende Verwirbelungen aufzuweisen. Tatsächlich ist für die Beschreibung turbulenter Strömungen, falls man vom Einfluss der Corioliskraft absieht, zweitrangig, ob es sich um die Erdatmosphäre oder einen Fluss handelt, da Turbulenz eine Strömungs- und keine Fluideigenschaft ist. Die meisten ihrer Eigenschaften gelten somit unabhängig davon, ob das Fluid liquid, z.B. Wasser oder gasförmig, z.B. Luft ist, und die Beschreibung der Erdatmosphäre ist daher weitestgehend mit den gleichen Turbulenzeigenschaften möglich wie die Beschreibung des Flussabschnitts in *Bild 1*. Wie können so chaotisch wirkende turbulente Strömungen mathematisch, experimentell oder numerisch beschrieben oder gar ihre Eigenschaften vorhergesagt werden? Dieser Artikel gibt dazu eine Einführung.

Die zwei Extremfälle einer Fluidströmung sind laminares oder völlig turbulentes Verhalten. Eine laminare Wasserströmung ist in *Bild 2a* dargestellt, welche einen Zylinder umströmt. Eine laminare Strömung besteht aus parallelen Schichten, sie bewegt sich regelmässig und geordnet und ist oft stationär, also zeitlich unveränderlich. Beispielsweise verhalten sich die meisten Grundwasserströmungen laminar. Eine turbulente Strömung ist neben *Bild 1* auch für die Zylinderumströmung in *Bild 2d* dargestellt. Sie ist im Allgemeinen (Jenny und Kleiser 2007, Pope 2006, Tennekes und Lumley 1997, Rodi 1984, Hinze 1959 etc.):

- dreidimensional,
- instationär,
- unregelmässig,
- dissipativ,
- diffus und
- weist ein weites Spektrum von Wirbelstrukturen auf.

Eine turbulente Strömung ist dreidimensional (örtlich veränderlich) und instationär (zeitlich veränderlich, *Bild 3b*). Sie ist dissipativ, d.h., turbulente kinetische Energie wird in Wärme umgewandelt, womit die Bewegung der Fluidströmung abnimmt, falls nicht stetig kinetische Energie zugeführt wird. Turbulente Diffusion bewirkt eine schnelle Durchmischung und begünstigt somit den Impuls-, Wärme- und Massenaustausch in der Strömung. Schliesslich weisen die Wirbelstrukturen einer turbulenten Strömung ein weites Spektrum an Grössen auf, welche sich völlig zufällig und chaotisch zu bewegen scheinen (*Bild 1*).

Zwischen diesen zwei Extremzuständen, laminar und völlig turbulent, liegt der Übergangsbereich (*Bild 2b* und *2c*). Praktisch alle natürlichen Strömungen in der Atmosphäre, in Flüssen, Seen oder Ozeanen und in künstlichen (hydraulischen) Bauwerken wie Schussrinnen, Wehren, Bewässerungssystemen, Trinkwasserversorgungen, Abwassersystemen oder Häfen sind turbulent (Nezu und Nakagawa 1993). Turbulent sind auch Strömungen um Flugzeuge, Autos, Schiffe oder

Bild 1. Turbulente Strömung stromaufwärts des Rheinfalls bei Neuhausen am Rheinfall mit einer Bildausschnittsbreite von rund 4 m.

U-Boote. Willkommen ist die Turbulenz bei Durchmischungsprozessen (Einspritzdüsen), bei der Einleitung von Abwasser oder Abluft (Schornstein) oder zur Beschleunigung von chemischen Reaktionen.

1.2 Relevanz in der Hydraulik

Das Thema Turbulenz wird in der klassischen Hydraulik meist nur am Rande behandelt, obwohl es für viele Phänomene wichtig ist. Zwei geschichtliche Hauptgründe sind nach Nezu und Nakagawa (1993) dafür verantwortlich:

(i) der Verlauf der Turbulenzforschung und

(ii) die Behandlung von vielen Phänomenen mit Mittelwerten.

(i) Die von Prandtl (1905) begründete Grenzschichttheorie, welche sich mit dem Verhalten von Fluidströmungen an Berandungen befasst (Schlichting und Gersten 1997), wurde in erster Linie zur Entwicklung von Flugzeugen in der Praxis verwendet. Sie wurde zudem in der Aerodynamik dank der weniger aufwändigen Messung von Turbulenz (z.B. mit Hitzedraht Anemometrie), im Gegensatz zu Wasserströmungen, intensiv vertieft.

(ii) In der klassischen Hydraulik wurden hingegen meist Näherungslösungen oder Mittelwerte verwendet. Für viele Fragestellungen, z.B. zur Durchflussbestimmung oder zur Quantifizierung der Froudezahl, ist der Mittelwert der Fliessgeschwindigkeit die relevante Grösse, während die Schwankungen eine vernachlässigbare Rolle spielen. Hingegen bei Fragestellungen betreffend der Kavitation auf einer Schussrinne, zum Aufreissen einer Deckschicht in kiesführenden Flüssen oder bei der Absetzgeschwindigkeit von Feststoffen in Entsandern spielen die Schwankungen der Geschwindigkeit oder der Druckhöhe eine entscheidende Rolle.

1.3 Ziel und Aufbau

Die technische Literatur zur Beschreibung von turbulenten Strömungen ist meist sehr mathematisch und man verliert leicht den Überblick. Dieser Artikel möchte einige grundsätzliche Phänomene zur Beschreibung turbulenter Strömungen mit möglichst wenig Mathematik aufzeigen und somit eine Einführung in dieses faszinierende Forschungsgebiet geben.

Im Unterkapitel 2.1 wird mit der Reynoldszahl die für die Charakterisierung der Turbulenz wichtigste Grösse eingeführt sowie auf die Reynolds-Aufspaltung und die turbulente kinetische Energie eingegangen. Die Möglichkeiten zur vollständigen Berechnung von turbulenten Strömungen werden im Unterkapitel 2.2 beschrieben. Viele Eigenschaften der Turbulenz lassen sich universell und somit losgelöst von der Geometrie eines Problems mit der in Unterkapitel 2.3 behandelten homogenen Turbulenz beschreiben. Die experimentellen Methoden zur Turbulenzmessung und Visualisierung werden in Kapitel 3 erläutert. Kapitel 4 zeigt die verschiedenen Methoden zur numerischen Behandlung von turbulenten Strömungen auf. Die wichtigsten Punkte des Artikels sind in *Bild 11* zusammengefasst und zeitlich eingeordnet sowie in den Schlussfolgerungen erwähnt.

2. Turbulenzbeschreibung

2.1 Klassifizierung

Überschreitet die so genannte Reynoldszahl einen kritischen Wert, so wird eine bis dahin laminare Strömung anfällig gegen kleine Störungen, welche sich fortpflanzen und die Strömung instabil machen können. Die Reynoldszahl ist daher die wichtigste Grösse zur Klassifizierung einer Strömung in laminar oder turbulent und ist definiert als

$$\mathrm{Re} = \frac{u_c l_c}{\nu}. \qquad (1)$$

Dabei ist u_c eine charakteristische Geschwindigkeit, l_c eine charakteristische Länge und ν die kinematische Viskosität des Fluids. Je nach Phänomen sind die charakteristischen Grössen unterschiedlich definiert. Reynolds (1883) verwendete die nach ihm benannte Zahl zur Beschreibung von Rohrströmungen. Dabei wird für u_c die mittlere Fliessgeschwindigkeit und für l_c der Rohrdurchmesser in Gl. (1) verwendet. Eine Wasserrohrströmung verhält sich laminar für Re < 2300 und im Normalfall völlig turbulent für Re > 4000. Dazwischen liegt der Übergangsbereich.

Für die Umströmung eines Zylinders, visualisiert mit Aluminiumpulver in Wasser in *Bild 2*, bietet sich der Zylinderdurchmesser als charakteristische Länge sowie die mittlere Zuströmgeschwindigkeit als charakteristische Geschwindigkeit an. In *Bild 2a* mit Re = 1.5 verhält sich die Strömung nach dem Zylinder laminar, in *Bild 2b* mit Re = 26 sowie *Bild 2c* mit Re = 105 liegt die Strömung im Übergangsbereich sowie in *Bild 2d* mit Re = 10 000 im turbulenten Bereich. Im Übergangsbereich entsteht die in *Bild 2c* dargestellte und nach Kármán (1911) benannte Wirbelstrasse im Zylindernachlauf.

Als letztes Beispiel zeigt *Bild 3a* einen turbulenten Wasserstrahl bei Re = 5000 definiert nach Gl. (1) mit der Geschwindigkeit und dem Durchmesser des Strahls beim Eintrittspunkt (Dahm und Dimotakis 1990). In *Bild 3b* ist der zeitliche Verlauf der Axialgeschwindigkeit u im Zentrum eines Luftstrahls dargestellt (Pope 2006). Die für eine turbulente Strömung typische Schwankung von u ist erkennbar.

Würden sich die Unbekannten in einer turbulenten Strömung, beispielsweise u in *Bild 3b*, völlig chaotisch verhalten, so könnte sie mathematisch nicht beschrieben werden. Glücklicherweise ist in einer turbulenten Strömung der Verlauf der Geschwindigkeit insofern stabil, dass keine sehr grossen Abweichungen auftreten und sich der Momentanwert nicht für längere Zeit vom Mittelwert entfernt. Dieser Umstand führt dazu, dass sich die Turbulenz statistisch (mit Mittelwert, Streuung, Varianz etc.) beschreiben lässt. Somit lässt

sich der Momentanwert u in einen zeitlich unveränderlichen Mittelwert $\bar{u}$ und eine turbulente Schwankungsgrösse u' zerlegen

$$u = \bar{u} + u'. \qquad (2)$$

Gleichung (2) wird auch als Reynolds-Aufspaltung bezeichnet. Da die Mittelwerte für viele Fragestellungen in der Praxis ausreichen, werden ihre Schwankungsgrössen oft vernachlässigt. Gleichung (2) wird in den Reynolds-Gemittelten Navier-Stokes Gleichungen verwendet und wird daher in Kapitel 4 zu den Möglichkeiten der numerischen Beschreibung turbulenter Strömungen wieder aufgegriffen.

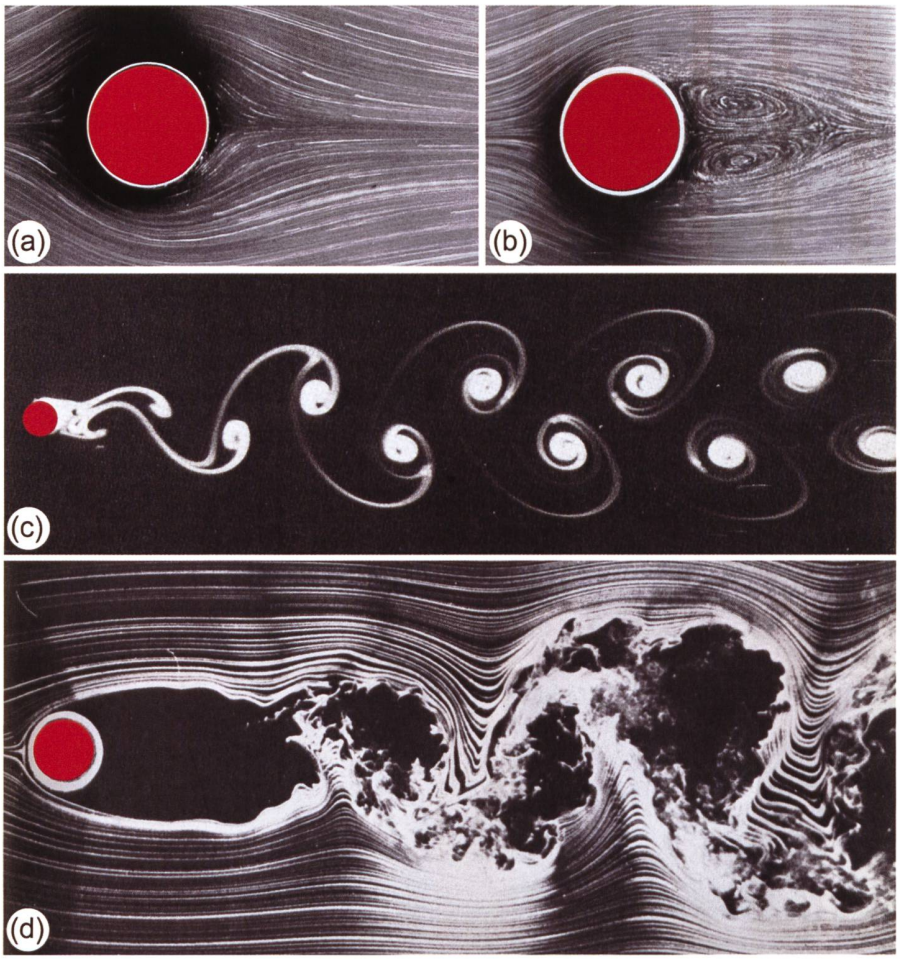

Bild 2. Verhalten einer Wasserströmung um einen Zylinder in Abhängigkeit der Reynoldszahl visualisiert mit Aluminiumpulver: (a) laminare Strömung mit Re = 1.5, (b) Strömung im Übergangsbereich mit Re = 26 und regelmässiges Wirbelpaar, (c) Strömung im Übergangsbereich mit Re = 105 und Kármánschen Wirbelstrasse und (d) turbulente Strömung mit Re = 10000 (Fotos S. Taneda in Van Dyke 1982).

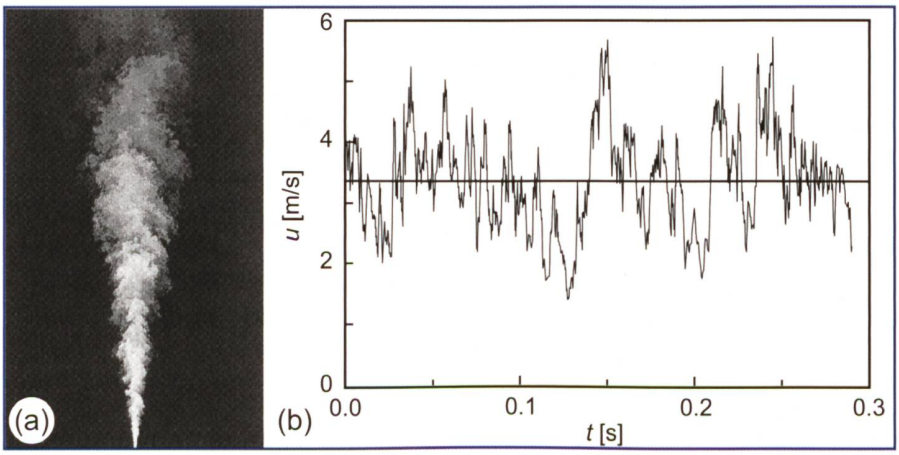

Bild 3. Turbulenter Strahl: (a) Wasserstrahl bei einer Reynoldszahl Re = 5000 (Dahm und Dimotakis 1990) und (b) zeitlicher Verlauf der Axialgeschwindigkeit in einem Luftstrahlzentrum (Pope 2006).

Die Heftigkeit oder Intensität einer turbulenten Strömung kann mit der turbulenten kinetischen Energie k (turbulent kinetic energy) quantifiziert werden. In x-Richtung ist sie definiert mit dem Mittelwert des Quadrates der turbulenten Schwankungsgrösse u' zu

$$k = \frac{1}{2}\overline{u'u'}. \qquad (3)$$

Die Grösse k weist die Einheit [m²/s²] auf und ist die mittlere kinetische Energie pro Einheitsmasse im schwankenden Geschwindigkeitsfeld. Sie spielt eine wichtige Rolle in der Turbulenz, da sie im Experiment relativ einfach messbar ist und als empirische Grösse in Turbulenzmodelle einfliesst (Unterkapitel 4.2.1).

2.2 Vollständige Beschreibung

Die Differentialgleichungen für die komplette Beschreibung einer turbulenten Strömung sind seit fast zwei Jahrhunderten bekannt. Es sind die Navier-Stokes-Gleichungen (Navier-Stokes Equations NSE, Navier 1822), welche die Impulserhaltung im Fluid berücksichtigen. Die NSE liefern zusammen mit der Kontinuitätsgleichung (Massenerhaltung), der Energiegleichung, der Zustandsgleichung sowie Anfangs- und Randbedingungen ein geschlossenes Gleichungssystem für die Unbekannten, nämlich die drei Geschwindigkeitskomponenten u, v und w (in x-, y- und z-Richtung), den Druck p sowie die Temperatur T in einem beliebigen Punkt in einer Strömung zu einem Zeitpunkt t. Die NSE in stark vereinfachter Form (inkompressibles Newtonisches Fluid, Vernachlässigung der Corioliskraft) mit der Erdbeschleunigungskomponente g_x in x-Richtung und der Fluiddichte ρ lautet in x-Richtung (z.B. Rodi 1984)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + g_x. \qquad (4)$$

Auf der linken Seite von Gl. (4) stehen die Beschleunigungsterme, der erste Term auf der rechten Seite berücksichtigt den Druckgradient, der Klammerinhalt die innere Reibung im Fluid und der letzte Term den Einfluss der Schwerkraft. Gleichung (4) inklusive der hier vernachlässigten Termen, der Formulierung in y- und z-Richtung und der vorher erwähnten zusätzlichen Gleichungen und Bedingungen vermag die turbulente Strömung in *Bild 1* genau

und vollständig ins kleinste Detail zu erfassen. Das Wetter, Strömungen im Ozean, Einspritzdüsen, die Bewegung von Sternen innerhalb einer Galaxie, alle diese Phänomene lassen sich mathematisch korrekt berechnen. Leider ist die analytische Auflösung nach den Unbekannten *u, v, w, p* sowie *T* nur für sehr einfache Fälle, unter Vernachlässigung einzelner Terme, möglich. Die Lösung der vollständigen NSE ist eines der vom Clay Mathematics Institute (2000) formulierten sieben wichtigsten ungelösten mathematischen Problemen, auf welche eine Preissumme von einer Million US Dollar ausgesetzt ist. Die kompletten NSE können jedoch numerisch gelöst werden (Direkte Numerische Simulierung). Bei der heutigen Rechenleistung ist dies oft nur für Strömungen kleiner Reynoldszahlen oder für ein beschränktes Rechengebiet möglich bzw. wirtschaftlich (Unterkapitel 4.2.4).

2.3 Homogene Turbulenz

Mit Hilfe der homogenen Turbulenz lässt sich beispielsweise aussagen, wie gross die kleinsten Wirbelstrukturen in einer turbulenten Strömung sind. Als Begründer der homogenen Turbulenztheorie gilt Taylor (1935), der die Begriffe statistisch homogene und isotrope (richtungsunabhängige) Turbulenz eingeführt hat. Eine ausführliche Darstellung zur homogenen Turbulenz enthält Batchelor (1953). Er definiert homogene Turbulenz als eine Zufallsbewegung dessen Mittelwerte unabhängig von der Position im Fluid sind. Die Turbulenzeigenschaften sind somit unabhängig von der Geometrie eines Problems und der Ausrichtung des Bezugssystems formulierbar. Es lassen sich mathematisch *universelle* Gesetze für die Beschreibung von Turbulenz herleiten. Ein hinreichend kleiner Bereich eines realen Fluids bei grosser Reynoldszahl lässt sich mit guter Näherung mit der homogenen Turbulenz beschreiben, wenn sich der betrachtete Bereich genügend weit von den Berandungen befindet und auch nicht in einer anderen Ausnahmestelle liegt (Kolmogorov 1958). Im Experiment kann homogene Turbulenz künstlich, beispielsweise mit einem im Fluid stehenden Gitter, erzeugt und dessen theoretischen Eigenschaften geprüft werden (grid turbulence, Uijttewaal und Jirka 2003).

Kolmogorov (1958) beschrieb die kleinsten Wirbelstrukturen einer turbulenten Strömung bei grosser Reynoldszahl als statistisch homogen und isotrop. Dazu entwickelte er das Energiekaskadenmodell (energy cascade model) von Richardson (1922) weiter und beschrieb die turbulente Strömung bei grosser Reynoldszahl als die Interaktion von Wirbeln verschiedener Grössen (*Bild 1* und *Bild 2d*). Die Strömung selbst generiert die grössten Wirbel, welche typischerweise die Abmessung des Problems (z.B. Wassertiefe oder Zylinderdurchmesser) aufweisen und somit von der gegebenen Geometrie abhängen, also nicht homogen sind. Wie in *Bild 4* schematisch dargestellt ist, wenden diese Wirbel praktisch ihre gesamte kinetische Energie auf, um kleinere Wirbel zweiter Ordnung zu generieren, die Energieumwandlung in molekulare Energie (Umwandlung in Wärme infolge von ν) ist dabei vernachlässigbar klein. Die Wirbel zweiter Ordnung generieren Wirbel dritter Ordnung und so weiter, bis kleinste Wirbelstrukturen mit typischen Durchmessern in der Grössenordnung von der Kolmogorovlänge (Kolmogorov microscale) η_K erzeugt werden. In diesen kleinsten Wirbelstrukturen wird gemäss *Bild 4* praktisch die gesamte kinetische Energie in molekulare Energie umgewandelt, die Grösse ν hat einen grossen Einfluss (Obuchow und Jaglom 1958). Mit Ausnahme der grössten Wirbel ist die Bewegung von Wirbeln höherer Ordnung unabhängig von der Mittleren Strömung sowie der Geometrie und somit homogen. Die Grösse η_K mit der Dimension einer Länge [m] wird (z.B. Pope 2006, Nezu und Nakagawa 1993, Batchelor 1953) pro Einheitsmasse mit ν [m²/s] sowie der mittleren Dissipationsenergie ε [m²/s³] definiert zu

$$\eta_K = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4} . \qquad (5)$$

Die Grösse ε bestimmt die Intensität der Energieströmung des Kaskadenprozesses. Während ν bekannt ist, muss ε abgeschätzt bzw. kann im Experiment bestimmt werden (Lavoie et al. 2007). Typische Längen von η_K liegen bei Strömungen im Ozean bei einigen Millimetern (Kundu und Cohen 2004), im physikalischen Modell je nach Problem bei rund 0.1–1.0 mm (Kimmoun und Branger 2007, Nezu und Nakagawa 1993). Die ty-

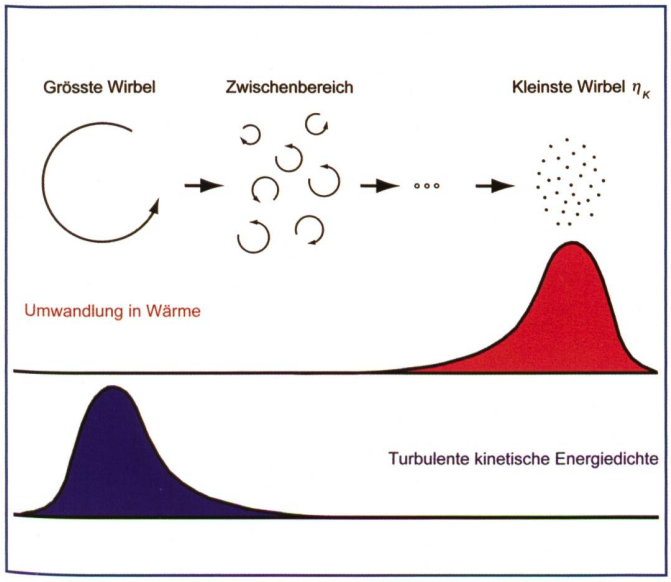

Bild 4. Prinzip des Energiekaskadenmodells mit Wirbeln verschiedener Ordnung, die räumlich getrennt voneinander betrachtet werden, sowie ihrem Energiehaushalt (nach Jenny und Kleiser 2007).

Experimentelle Techniken zur Charakterisierung turbulenter Wasserströmungen	
Punktmessungstechniken	**Strömungsvisualisierungstechniken**
Laser-Doppler Anemometrie/Velocimetrie Acoustic-Doppler Velocimetrie Heissfilm Anemometrie	Particle Image Velocimetrie Particle Tracking Velocimetrie Farbzugabe Partikelzugabe (z.B. Aluminiumpulver)

Bild 5. Experimentelle Techniken zur Charakterisierung turbulenter Wasserströmungen, aufgeteilt in Punktmessungs- und Strömungsvisualisierungstechniken (nach Nezu und Nakagawa 1993).

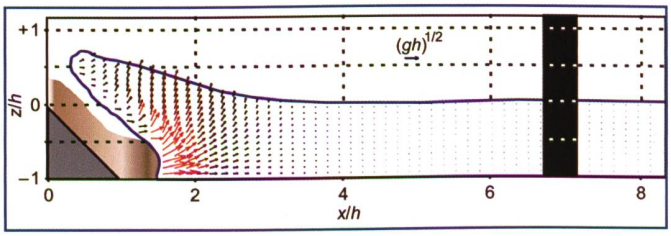

Bild 6. Partikelgeschwindigkeitsfeld im Wasserprofil einer durch den braunen Rutsch generierten Impulswelle im Wellenkanal, bestimmt mit Particle Image Velocimetrie (Heller 2007).

pische Auftretensdauer t_K der kleinsten Wirbelstrukturen sind nach Kolmogorov (1958) ebenfalls nur von ν und ε abhängig, nämlich mit

$$t_K = \left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{1/2}. \qquad (6)$$

Bei einer 20 °C warmen Wasserströmung ist $\nu = 10^{-6}$ m²/s und mit Gl. (5) ergibt sich für das oben erwähnte Intervall η_K = 0.1–1.0 mm im physikalischen Modell $\varepsilon = 10^{-2}$ –10^{-6} m²/s³. Die entsprechende Auftretensdauer berechnet sich mit Gl. (6) zu t_K = 10^{-2}–1 s.

Wird in Gl. (1) als charakteristische Geschwindigkeit η_K/t_K und für die charakteristische Länge η_K eingesetzt, so ergibt sich unter Einbezug der Gln. (5) und (6) $\mathrm{Re} = [(\nu^3/\varepsilon)^{1/4}/(\nu/\varepsilon)^{1/2}]\cdot(\nu^3/\varepsilon)^{1/4}/\nu = 1$ für die kleinsten Wirbelstrukturen. Sie sind somit nicht turbulent, sondern zähflüssig, was die Bildung noch kleinerer Wirbelstrukturen unterbindet (Kolmogorov 1958, Obuchow und Jaglom 1958). Beide Grössen ν und ε sind Fluideigenschaften und die Turbulenz ist somit statistisch losgelöst von der Geometrie des Problems beschreibbar (1. Ähnlichkeitshypothese von Kolmogorov).

3. Turbulenzmessung

3.1 Einführung

Nezu und Nakagawa (1993) unterscheiden zwischen zwei Kategorien von Messsystemen, um Turbulenz in Wasserströmungen zu beschreiben:

(i) Punktmessungstechniken und

(ii) Strömungsvisualisierungstechniken.

Diese zwei Kategorien sind mit ihren wichtigsten Vertretern in *Bild 5* dargestellt. Zur Kategorie (i) gehören Laser-Doppler-Anemometrie, Acoustic-Doppler-Velocimetrie und Heissfilm-Anemometrie bei denen punktweise gemessen wird, mit oder ohne Hilfe von Tracern. Zu (ii) gehören Particle Image Velocimetrie PIV, Particle Tracking Velocimetrie PTV, Farbzugabe und Partikelzugabe, wobei für die Messung ein Tracer oder ein anderer Indikator ins Wasser gegeben wird, um die Fliesseigenschaften in einer zusammenhängenden Struktur indirekt sichtbar zu machen. Bei allen Techniken mit Tracern gilt die Annahme, dass sich die Partikel gleich wie das sie umgebende Fluid bewegen. Die Methoden Farb- und Partikelzugabe (Aluminiumpulver in *Bild 2*) dienen lediglich zur Visualisierung, jedoch im Gegensatz zu PIV und PTV nicht zur Quantifizierung der Bewegung von Wirbelstrukturen. Die Wahl des geeigneten Messsystems hängt von der gewünschten zeitlichen und räumlichen Auflösung der Messung ab und somit auch ob im Labor oder in der Natur gemessen wird.

Die Methoden, um Turbulenz in Wasserströmungen zu messen, sind wesentlich jünger als die theoretischen Beschreibungen in Kapitel 2. Sie haben jedoch die Theorie, beispielsweise der homogenen Turbulenz, weitestgehend bestätigt (Obuchow und Jaglom 1958). Anschliessend werden die wichtigsten in *Bild 5* dargestellten Messsysteme vorgestellt.

3.2 Punktmessungstechniken

3.2.1 Laser-Doppler-Anemometrie

Laser-Doppler-Anemometrie LDA, auch Laser-Doppler-Velocimetrie genannt, ist eine berührungslose optische Messmethode, welche mit einer Frequenz von bis zu 10 000 Hz die verschiedenen Geschwindigkeitskomponenten in einem Messpunkt liefert.

Das Prinzip der LDA ist in Durst et al. (1981) beschrieben. Ein Laserstrahl wird mit einem Prisma in zwei Teile identischer Intensität aufgespalten und jeweils auf den Messpunkt im Fluid bzw. dem kleinen Messvolumen typischer Länge von 1 mm und einem Durchmesser von 0.1 mm, fokussiert. Dem Fluid werden kleine Tracerpartikel beigegeben, welche sich annähernd mit der gleichen Geschwindigkeit wie das sie umgebende Fluid bewegen. Durchquert ein solches Partikel das Messvolumen, so wird Streulicht von beiden Laserstrahlen reflektiert. Mithilfe der Frequenz dieses Streulichts, der Wellenlänge des ursprünglichen Lasers, dem Schnittwinkel der sich kreuzenden Laserstrahlen und unter Verwendung des Doppler-Effekts kann die Geschwindigkeit des Tracerpartikels bzw. des Fluids berechnet werden. Dazu sind lediglich Grössen des Messsystems selbst nötig, womit keine Kalibrierung im Experiment nötig ist (Durst et al. 1981). Dank der hohen zeitlichen Auflösung der Geschwindigkeit und der einfachen Handhabung ohne Kalibrierung ist diese Methode zur Bestimmung von Turbulenzeigenschaften weit verbreitet und dient oft als Referenz.

3.2.2 Acoustic-Doppler-Velocimetrie

Acoustic-Doppler-Velocimetrie ADV wurde 1993 erfunden. ADV ist eine relativ kostengünstige Punktmessungstechnik, welche mit einer maximalen Messfrequenz von rund 100 Hz die Wassergeschwindigkeit in drei Raumrichtungen bestimmt. Trotz dieser relativ niedrigen Messfrequenz kann unter Umständen (beispielsweise in Naturmessungen) eine gute Beschreibung von turbulenten Strömungen erzielt werden (García et al. 2005).

Das Messprinzip ist in García et al. (2005) erläutert: von einer Quelle in der Sondenmitte wird ein akustisches Signal abgegeben, das an Partikeln im Messvolumen reflektiert wird. In natürlichen Gewässern sind bereits ausreichend Partikel vorhanden, im Labor müssen unter Umständen zusätzliche Partikel beigegeben werden. Das Messvolumen ist zwischen 0.09 bis 2 cm³ gross und befindet sich je nach Typ 5 bis 18 cm vom Sensor entfernt. An der Messstelle wird somit nicht ins Wasser eingegriffen. Das reflektierte Signal wird von drei um die Quelle herum angeordneten Empfängern aufgezeichnet. Mit Hilfe der Phasenverschiebungen und der Laufzeiten der drei Signale können die drei Geschwindigkeitskomponenten im Messvolumen bestimmt werden, wiederum mit dem Doppler-Effekt.

3.2.3 Heissfilm-Anemometrie

Heissfilm-Anemometrie wird hauptsächlich in Wasserströmungen verwendet, während ihr verwandtes System, die Hitzdraht-Anemometrie, eher in Luftströmungen, beispielsweise beim Experiment in *Bild 8*, zum Einsatz kommt (Nezu und

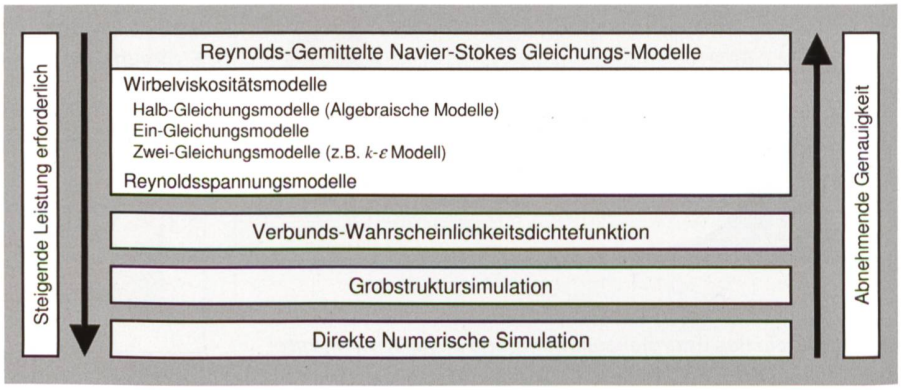

Bild 7. Fünf Methoden zur Beschreibung turbulenter Strömungen (nach Jenny und Kleiser 2007).

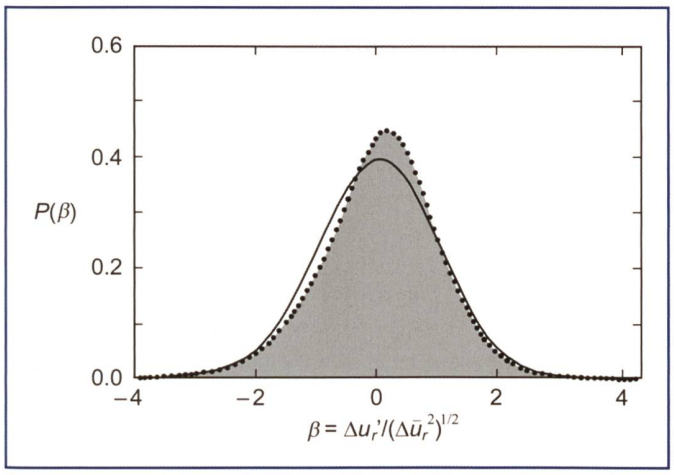

Bild 8. Mit Hitzdraht-Anemometrie bestimmte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion P(β) von $\beta = \Delta u_r'/(\Delta \bar{u}_r^2)^{1/2}$, der Radialgeschwindigkeitsdifferenz $\Delta u_r' = u_r'(x + r) - u_r'(x)$ der Schwankungen normiert mit der Wurzel aus dem Quadrat der Geschwindigkeitsdifferenz $(\Delta \bar{u}_r^2)^{1/2}$ der Mittelwerte in einem Luftstrahl bezüglich zweier Punkte mit Abstand $r = 167 \cdot_K$; (•••) beschreibt die Messwerte und (–) die Gausssche Glockenkurve (Castaing et al. 1990).

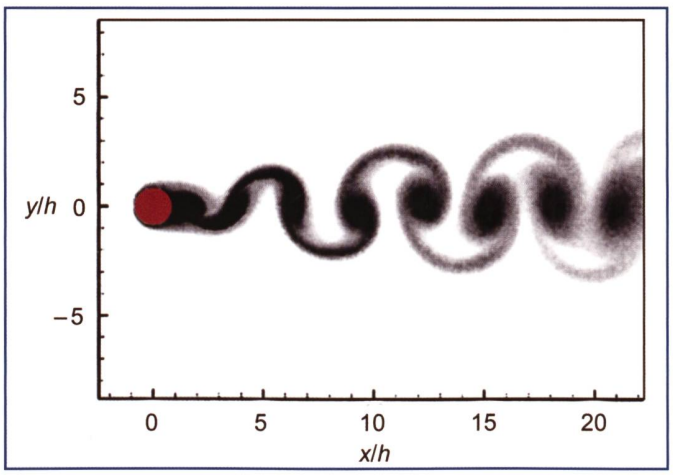

Bild 9. Tiefengemittelte LES der Tracerkonzentration im Zylindernachlauf, welche eine Kármánsche Wirbelstrasse bildet (Hinterberger et al. 2007).

Nakagawa 1993). Beide Systeme wurden Ende der 1960er-Jahre entwickelt und in den 60er- und 70er-Jahren in vielen Studien verwendet und haben damit entscheidend zur experimentellen Prüfung der theoretischen Beschreibung von turbulenten Strömungen beigetragen.

Bei der Heissfilm-Anemometrie können die Geschwindigkeitskomponenten in bis zu drei Raumrichtungen ohne die Zugabe von Tracern punktweise bestimmt werden. Die Methode greift jedoch ins Fluid ein. Ein erhitzter Metallfilm wird entsprechend der Strömungsgeschwindigkeit des ihn umgebenden Fluids mehr oder weniger stark abgekühlt. Der elektrische Widerstand im Film ist eine Funktion dieser Temperatur. Ein elektrischer Strom wird durch den Film geleitet und das erhaltene Voltsignal ändert sich in Funktion des Widerstands bzw. der Strömungsgeschwindigkeit. Die Beziehung zwischen Strömungsgeschwindigkeit und Voltsignal wird durch Kalibrierung gefunden. Entscheidend für die Genauigkeit dieser Methode ist eine konstante Wassertemperatur. Nachteile wie die heikle Kalibrierung oder das Eingreifen ins Fluid haben ab Ende der 70er-Jahre dazu geführt, dass vermehrt die neu aufkommende Laser-Doppler-Anemometrie verwendet wurde.

3.3 Strömungsvisualisierungstechniken

3.3.1 Particle Image Velocimetrie

Particle Image Velocimetrie PIV wurde laut Grant (1997) in den frühen 1980er-Jahren als eigenständige Messmethode beschrieben. Die Stärke dieser berührungslosen optischen Methode liegt in der Gewinnung der flächenhaften Information des Strömungsfelds und somit der Visualisierung der Bildung und des Zerfalls von Wirbelstrukturen. Die Methode erlaubt die Bestimmung des Partikelgeschwindigkeitsfelds in einer Ebene oder Volumen mit bis zu drei Raumkomponenten. Die Geschwindigkeitsvektoren im Fluid werden indirekt mit Hilfe von Tracerpartikeln bestimmt. Die Messebene im Fluid wird mit einem Laserstrahl definiert, Messungen an der Oberfläche sind ohne Laser mit konventioneller Beleuchtung möglich (Weitbrecht et al. 2007). Bei der Messung im Fluid steht üblicherweise senkrecht zur Messebene eine CCD-Kamera, welche mit einem Filter ausgestattet ist, der nur das Licht mit der Frequenz des Laserstrahls passieren lässt. Bei entsprechender Fokussierung wird somit nur in der durch den Laser definierten Messebene aufgenommen. Die Tracerpartikel sind auf einer Aufnahme als weisse Punkte erkennbar. Mit einer Kreuzkorrelation kann die Verschiebung von Tracerpartikelgruppen zwischen zwei hintereinander folgenden Aufnahmen berechnet werden und somit bei bekanntem Zeitintervall zwischen den zwei Bildern das Partikelgeschwindigkeitsfeld bestimmt werden (Raffel et al. 1998).

Bild 6 zeigt ein Partikelgeschwindigkeitsfeld in einem Experiment zur Untersuchung von rutscherzeugten Impulswellen in einem Wellenkanal (Heller 2007). Der dargestellte Schnitt befindet sich in der Kanallängsachse. Der braune granulare Rutsch bewegt sich auf der grauen Rutschrampe in einen Wasserkörper und erzeugt einen Einschlagkrater. Pro Sekunde wurden 15 solche Bilder aufgenommen. Die Vektoren geben den Betrag und die Richtung des Fluids an der Stelle des Vektorenanfangs relativ zur linearen Flachwasserwellengeschwindigkeit $(gh)^{1/2}$ an. Ein Geschwindigkeitsvektor in *Bild 6* repräsentiert ein Viereck der Grösse 50 (H) mm × 25 (V) mm. Die Kolmogorovlänge nach Gl. (5) dürfte für den vorliegenden Laborversuch in der Grössenordnung $\eta_K = 0.1–1.0$ mm liegen (Unterkapitel 2.3). Nach Lavoie et al. (2007) sollte die räumliche Auflösung zur annähernd (mit einem Fehler kleiner 30%) korrekten Bestimmung der Statistik der kleinsten Wirbelstrukturen in einer Luftströmung bei rund $5 \cdot \eta_K$ oder kleiner liegen. Wendet man dieses Kriterium auch auf Wasser an, dann ist die Auflösung in *Bild 6* bei weitem nicht ausreichend. Tatsächlich war der Zweck der Aufnahme nicht die Bestimmung von Turbulenzeigenschaften, sondern die Abschätzung der im Wasser enthaltenen kinetischen Energie sowie die grobstrukturige Darstellung des Phänomens. Generell kann mit PIV das Kriterium $5 \cdot \eta_K$ durchaus erfüllt werden, was die Methode zu einem wichtigen Werkzeug zur Beschreibung von turbulenten Strömungen macht.

3.3.2 Particle Tracking Velocimetrie

Particle Tracking Velocimetrie PTV hat sich nach Hoyer et al. (2005) in den 1980er-Jahren zur heute verbreiteten Methode entwickelt, das Grundprinzip ist jedoch wesentlich älter. Mit PTV wird im Gegensatz zu PIV nicht die Bewegung von Tracerpartikelgruppen, sondern von einzelnen Tracerpartikeln mit Hilfe von photogrammetrischen Beziehungen ausgewertet. Das

Resultat sind die Trajektorien bzw. die Geschwindigkeitsvektoren im dreidimensionalen Raum. Das Messvolumen wird mit einem Laser oder einer anderen Lichtquelle beleuchtet. Die Dichte der Tracerpartikel ist gegenüber PIV wesentlich reduziert, um die Wahrscheinlichkeit von Partikelverwechslungen klein zu halten. Aus demselben Zweck sind nicht nur deren zwei, sondern typischerweise drei bis vier Kameras auf das Messvolumen gerichtet. Die Anzahl verfolgbarer Partikel ist eine wesentliche Limitation von PTV. Neuere Modifizierungen von PTV erlauben jedoch bereits eine Auswertung von bis zu 3500 Partikeln (Hoyer et al. 2005).

4. Numerische Modellierung

4.1 Einleitung

Es existiert keine beste numerische Methode zur Beschreibung turbulenter Strömungen, sondern eine breite Auswahl von Methoden, die je nach Problemstellung besser oder schlechter geeignet sind (Pope 2006). Pope (2006) beschreibt die in *Bild 7* dargestellten fünf Kategorien wichtiger numerischer Berechnungsmethoden, nämlich (i) Wirbelviskositätsmodelle und (ii) Reynoldsspannungsmodelle, welche beide auf den Reynolds-Gemittelten Navier-Stokes Gleichungen basieren, die (iii) Verbunds-Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion, die (iv) Grobstruktursimulation (LES) sowie die (v) Direkte Numerische Simulation (DNS).

Kriterien, um zwischen numerischen Methoden zur Beschreibung einer turbulenten Strömung zu unterscheiden, sind nach Pope (2006) der

(i) Auflösungsgrad der unbekannten Grössen,
(ii) Vollständigkeit der Methode,
(iii) Berechnungskosten und Benutzerfreundlichkeit,
(iv) Umfang des Anwendungsbereichs
(v) Genauigkeit der Berechnung.

Unter Punkt (i) ist einzuordnen, in welcher Form die gesuchten Grössen berechnet werden. Bei Simulationen (LES, DNS) wird das zeitabhängige Geschwindigkeitsfeld einer turbulenten Strömung für einen Zeitpunkt aufgelöst (in drei Raumrichtungen), während bei Turbulenzmodellen die Mittelwerte (z.B. $\bar{u}$ ohne Schwankungsgrösse) am jeweiligen Punkt bestimmt werden. Ein Modell gilt als (ii) vollständig, wenn keine ihrer Grössen empirisch ausgedrückt werden muss. Die DNS ist eine vollständige Methode während bei Turbulenzmodellen, d.h., bei den restlichen vier Berechnungsmethoden, Empirie einfliesst. Die fünf Methoden sind nach steigender benötigter Computerleistung geordnet was ein Indiz für (iii) ihre Berechnungskosten ist. Punkt (iv) berücksichtigt, dass eine DNS aufgrund ihrer hohen Berechnungskosten nicht mehr wirtschaftlich auf eine Strömung mit mittlerer oder grosser Reynoldszahl angewendet werden kann, während ein Wirbelviskositätsmodell bei komplexen Problemen kaum mehr realistische Resultate liefert. Die (v) Genauigkeit der numerischen Berechnung kann durch den Vergleich mit Experimenten geprüft werden. Im Folgenden wird auf die fünf oben erwähnten Methoden einzeln eingegangen.

4.2 Fünf numerische Berechnungsmethoden

4.2.1 Wirbelviskositäts- und Reynolds spannungsmodelle

Die Reynolds-Gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen (Reynolds-Averaged Navier-Stokes RANS equations) ergeben sich aus den Navier-Stokes-Gleichungen, falls die Momentanwerte durch die Mittelwerte und ihre Schwankungsgrössen ersetzt werden. D.h., der Ausdruck auf der rechten Seite von Gl. (2) ersetzt in Gl. (4) die Grösse u. Diese Gleichungen werden zusätzlich zeitlich gemittelt, um die Mittelwerte der Strömung zu beschreiben. Dies reicht für die meisten Ingenieuranwendungen aus. Somit entstehen die RANS-Gleichungen. Diejenige in x-Richtung für ein inkompressibles Newtonisches Fluid, unter Vernachlässigung der Corioliskraft, hat die gleiche Form wie Gl. (4) bis auf drei zusätzliche Terme auf der rechten Seite und den Mittelwerten, welche nun die Grössen u und p ersetzen. Die gegenüber Gl. (4) zusätzlichen Terme auf der rechten Seite der RANS Gleichungen sind die Reynoldsspannungen, welche in der x-Richtung lauten

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{u'u'}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{u'v'}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{u'w'}\right). \qquad (7)$$

Die Reynoldsspannungen bilden unter Berücksichtigung aller drei Koordinatenrichtungen einen symmetrischen Reynoldsspannungstensor mit sechs Unbekannten. Die RANS-Gleichungen beschreiben die Mittelwerte der Strömung exakt, sie können jedoch nicht analytisch gelöst werden, da sie im Gegensatz zum ursprünglichen Gleichungssystem um Gl. (4) kein geschlossenes System mehr bilden und somit mehr Unbekannte als Gleichungen aufweisen (closure problem). Die RANS-Gleichungen benötigen daher zur Lösung zusätzliche Annahmen oder (empirische) Bedingungen. Diese Annahmen oder Bedingungen drücken die durch die Mittelung zusätzlich entstehenden neun Unbekannten (sechs in den RANS-Gleichungen und drei in der gemittelten Energiegleichung) entweder in Funktion der bekannten Mittelwerte oder durch Grössen, welche im Experiment bestimmt werden können (z.B. turbulente kinetische Energie nach Gl. [3]), aus. Diese Bedingungen werden mit Hilfe eines Turbulenzmodells definiert bzw. ins Gleichungssystem integriert (Pope 2006, Rodi 1984).

Die in *Bild 7* dargestellten RANS-Gleichungsmodelle enthalten unterschiedliche Turbulenzmodelle. Bei den Wirbelviskositätsmodellen (eddy-viscosity models) werden die Reynoldsspannungen proportional zu den Verformungsgeschwindigkeiten des mittleren Strömungsfelds gesetzt. Dazu wird eine Wirbelzähigkeit (eddy viscosity) eingeführt, welche in dieser neuen Gleichung als Proportionalitätsfaktor zwischen Reynoldsspannungen und Verformungsgeschwindigkeiten dient. Die Halb-, Ein- und Zwei-Gleichungsmodelle geben die Anzahl Transportgleichungen an, die im jeweiligen Turbulenzmodell zusätzlich eingeführt und gelöst werden. Das wohl populärste Wirbelviskositätsmodell ist das auf Jones und Launder (1972) basierende k-ε-Modell. Bei den auf Launder et al. (1975) zurückgehenden Reynoldsspannungsmodellen (Reynolds-stress models) wird jede einzelne Komponente des Reynoldsspannungstensors getrennt modelliert (Jenny und Kleiser 2007).

4.2.2 Verbunds-Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

Bei dieser Methode wird die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (Probability Density Function PDF) verwendet, um die statistischen Eigenschaften, beispielsweise der Mittelwert der Geschwindigkeit oder die Schiefe der Verteilfunktion der Geschwindigkeit, zu bestimmen. Unter Verbund ist zu verstehen, dass die Grösse an einem Punkt nicht isoliert als Zufallsgrösse, sondern unter Berücksichtigung vom Einfluss vom Umfeld betrachtet wird.

Bild 8 zeigt die PDF $P(\beta)$ von $\beta = \Delta u_r'/(\Delta \bar{u}_r^2)^{1/2}$, der normierten Radialgeschwindigkeitsdifferenz der Schwankungen bezüglich zweier Punkte in einem Luftstrahl mit Abstand $r = 167 \cdot \eta_K$ von Castaing et al. (1990). Sie enthält zwar Messwerte, eine numerische Berechnung liefert jedoch ähnliche Informationen. Die Radialgeschwindigkeitsdifferenz $\Delta u_r' = u_r'(x + r) - u_r'(x)$ der Schwankungen gibt hauptsächlich die Geschwindigkeit der Wirbel

der Grösse r an. Sie ist mit der Wurzel aus dem Quadrat der Radialgeschwindigkeitsdifferenz $(\Delta\bar{u}_r^2)^{1/2}$ der Mittelwerte normiert. Die graue Fläche unter der Kurve ergibt 1. Abweichungen der PDF gegenüber der ebenfalls eingezeichneten Gaussschen Glockenkurve sind erkennbar: einerseits liegt der Maximalwert bei 0.45 anstelle von 0.40, anderseits ist die PDF leicht zum positiven Bereich hin verschoben. Die Aussage einer PDF der Geschwindigkeit ist somit, mit welcher Wahrscheinlichkeit sie an einem Punkt in einem gewissen Intervall liegt und wie die Wahrscheinlichkeitsverteilung aussieht.

4.2.3 Grobstruktursimulation

Pionierarbeit an der Grobstruktursimulation (Large Eddy Simulation LES) wurde in der Meteorologie von Smagorinsky (1963) geleistet. Bei der LES werden nur die Geschwindigkeiten berechnet, welche über einem bestimmten Grenzwert liegen. Der Einfluss der nicht aufgelösten kleineren Geschwindigkeiten auf die grösseren Wirbelstrukturen wird mit einem Turbulenzmodell bestimmt, da sie universellen Gesetzmässigkeiten folgt und somit losgelöst vom Problem behandelt werden können. Das Strömungsfeld kann mit einer LES mit etwas kleinerem Rechenaufwand als die DNS ebenfalls in drei Dimensionen sowie zu verschiedenen Zeitpunkten abgebildet werden und ist im Allgemeinen genauer und verlässlicher als eine RANS-Modellierung (Pope 2006).

Eine tiefengemittelte LES von Hinterberger et al. (2007) zeigt *Bild 9*. Simuliert wurde die Tracerkonzentration im Zylindernachlauf, welche eine Kármánsche Wirbelstrasse bildet. Die Wassertiefe ist $h = 0.038$ m, die mittlere Fliessgeschwindigkeit $\bar{u} = 0.143$ m/s, der Zylinderdurchmesser $D = 0.063$ m und somit Re = 9030. Bei dem hier vorliegenden Beispiel einer Flachwasserströmung ist die Strömung stabiler als in *Bild 2c* und die Kármánsche Wirbelstrasse tritt bei einer grösseren Reynoldszahl auf. Obwohl die Strömungen in den *Bildern 9* und *2c* unterschiedliche Parameter aufweisen, ist eine gute Übereinstimmung erkennbar.

4.2.4 Direkte Numerische Simulation

Bei der Direkten Numerischen Simulation (Direct Numerical Simulation DNS) werden die vollständigen Navier-Stokes-Gleichungen für einen Zeitpunkt aufgelöst. Eine der ersten Publikationen zur DNS stammt von Orszag und Patterson (1972), welche mit 32^3 Netzpunkten gearbeitet haben. Die Kosten für eine DNS einer Strömung steigen dabei überproportional mit der Reynoldszahl mit Re^3 (Jenny und Kleiser 2007, Pope 2006). Deshalb ist eine DNS heute nur für Strömungen mit kleiner Reynoldszahl wirtschaftlich. Die momentan grösste räumliche Auflösung wurde von Ishihara et al. (2009) mit 4096^3 (rund 69 Milliarden) Netzpunkten beschrieben, um bei einer grossen Reynoldszahl ein Gebiet von $12\,267\,\eta_K \times 12\,267\,\eta_K$ zu berechnen. Allgemein ist jedoch die Rechenleistung für eine DNS für praktische Anwendungen noch ungenügend (Hinterberger et al. 2007).

Bild 10 zeigt die Leistungsentwicklung des weltweit leistungsfähigsten (■), des 500 leistungsfähigsten (■) sowie der Summe der 500 leistungsfähigsten (■) Prozessoren in Flops (floating-point operations per second) seit 1993. Ein Computer mit einem Megaflop kann 10^6 Rechenoperationen in einer Sekunde durchführen. *Bild 10* zeigt eine exponentielle Zunahme der Rechenleistung in den letzten 15 Jahren, wobei sie pro Jahr durchschnittlich um 90% angestiegen ist. Dies entspricht in der Summe der 500 leistungsfähigsten Prozessoren (■) einer Entwicklung von 1.12 auf 16 953 Tetraflops und somit einer Vervielfachung um den Faktor 15 137 zwischen 1993 und 2008. Dieser Trend scheint sich fortzusetzen womit die DNS zunehmend attraktiver wird und sich das Problem der fehlenden analytischen Lösung der NSE, zumindest für räumlich begrenzte Probleme, erübrigt.

5. Schlussfolgerungen

Dieser Artikel gibt eine Einführung in die analytische, experimentelle und numerische Beschreibung turbulenter Strömungen und erleichtert den Einstieg in die umfangreichen Überblicke von Pope (2006), Tennekes und Lumley (1997), Nezu und Nakagawa (1993), Rodi (1984), Hinze (1959) oder Batchelor (1953).

Zur Übersicht sind die in diesem Artikel behandelten Phänomene in *Bild 11* zusammengefasst, zeitlich eingeordnet sowie mit Referenzen versehen. Im Rahmen dieses Artikels konnte nicht auf alle wichtigen Punkte rund um die Turbulenz eingegangen werden. Er enthält jedoch die meisten der in den geschichtlichen Überblicken von Kundu und Cohen (2004), Nezu und Nakagawa (1993) oder Batchelor (1953) erwähnten Phänomene.

Nach *Bild 11* haben im vorletzten

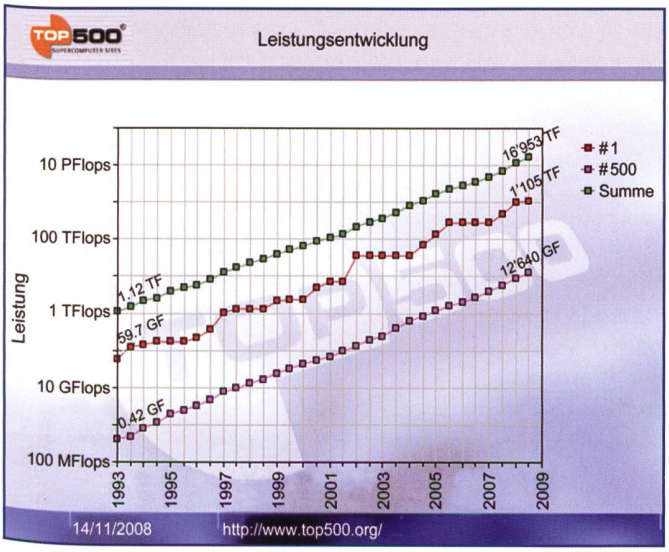

Bild 10. Exponentielle Rechenleistungsentwicklung des weltweit leistungsfähigsten (■), des 500 leistungsfähigsten (■) und der Summe der 500 leistungsfähigsten (■) Prozessoren seit 1993 (von http://www.top500.org/).

Jahr	Phänomen	Hauptbegründer; *Literatur zum Thema*	Kapitel
1822	Navier-Stokes Gleichungen	Navier (1822); *Rodi (1984)*	2.2
1890	Beschreibung turbulente Rohrströmung, Reynolds-Gemittelte Navier-Stokes Gln.	Reynolds (1883); *Pope (2006), Rodi (1984)*	2.1/4.2.1
1900	Grenzschichttheorie	Prandtl (1905); *Schlichting und Gersten (1997)*	1.2
1910	Kármánsche Wirbelstrasse	Kármán (1911); *Van Dyke (1982)*	2.1/4.2.3
1920	Konzept Energiekaskadenmodell	Richardson (1922); *Obuchow und Jaglom (1958)*	2.3
1930	Theorie isotrope und homogene Turbulenz	Taylor (1935); *Batchelor (1953)*	2.3
1940	1. Ähnlichkeitshypothese, Kolmogorovlänge, Vertiefung Energiekaskadenmodell	Kolmogorov (1941); *Obuchow und Jaglom (1958), Kolmogorov (1958), Batchelor (1953)*	2.3
1950			
1960	Grobstruktursimulation	Smagorinsky (1963); *Pope (2006)*	4.2.3
	Heissfilm Anemometrie	*Nezu und Nakagawa (1993)*	3.2.3
	Blütezeit der Punktmessungen	*Nezu und Nakagawa (1993)*	3.2.3
1970	k-ε Modell (Wirbelviskositätsmodell)	Jones und Launder (1972); *Pope (2006)*	4.2.1
	Direkte Numerische Simulation	Orszag und Patterson (1972); *Pope (2006)*	4.2.4
	Reynoldsspannungsmodell	Launder et al. (1975); *Pope (2006)*	4.2.1
	Laser-Doppler Anemometrie	*Durst et al. (1981)*	3.2.1
1980	Particle Tracking Velocimetrie	*Hoyer et al. (2005)*	3.3.2
	Particle Image Velocimetrie	*Raffel et al. (1998)*	3.3.1
1990	Acoustic-Doppler Velocimetrie	*García et al. (2005)*	3.2.2
2000			

Bild 11. Zeitliche Einordnung der in diesem Artikel behandelten Phänomene rund um die Beschreibung turbulenter Strömungen mit Literaturangaben und Referenzen zu den Kapiteln (angelehnt an Nezu und Nakagawa 1993).

und bis zu den 40er-Jahren des letzten Jahrhunderts hauptsächlich theoretische Überlegungen wie die Reynolds-Aufspaltung (RANS-Gleichungen) oder das Energiekaskadenmodell *(Bild 4)* die Turbulenzforschung vorangetrieben. Diese theoretischen Erkenntnisse konnten ab den 30er-Jahren vom letzten Jahrhundert, vor allem mit Heissfilm- und Hitzdraht-Anemometrie, nach und nach experimentell geprüft und oft bestätigt werden. Heute erlauben Messmethoden *(Bild 5)* wie Laser-Doppler-Anemometrie mit der hohen zeitlichen Auflösung oder Particle Image Velocimetrie *(Bild 6)* mit der detaillierten räumlichen Auflösung weitere Einblicke in die Turbulenz. Die seit den 60er-Jahren aufkommenden numerischen Methoden *(Bild 7)* spielen eine immer wichtigere Rolle. Mit der nach *Bild 10* exponentiell steigenden Rechenleistung wird sich dieser Trend vermutlich fortsetzen, womit die vollständige numerische Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen mittels Direkter Numerischer Simulation, zumindest für räumlich begrenzte Probleme, immer attraktiver wird.

Danksagung

Der Autor möchte sich bei Dr. V. Weitbrecht, VAW, ETH Zürich, für die Durchsicht des Artikels und die Verbesserungsvorschläge bedanken. Ein Dank geht ebenfalls an Prof. Dr. P. Jenny und Prof. Dr. L. Kleiser, Institut für Fluiddynamik, ETH Zürich, für die Durchführung der Vorlesung Turbulent Flows.

Literatur

Batchelor, G.K. (1953). The theory of homogeneous turbulence. Cambridge University Press, Cambridge.

Castaing, B., Gagne, Y., Hopfinger, E.J. (1990). Velocity probability density functions of high Reynolds number turbulence. Physica D 46: 177–200.

Clay Mathematics Institute (2000). Online: http://www.claymath.org/millennium/.

Dahm, W.J.A., Dimotakis, P.E. (1990). Mixing at large Schmidt number in the self-similar far field of turbulent jets. Journal of Fluid Mechanics 217: 299–330.

Durst, F., Melling, A., Whitelaw, J.H. (1981). Principles and practice of laser-doppler anemometry. Academic Press, London.

García, C.M., Cantero, M.I., Niño, Y., García, M.H. (2005). Turbulence measurements with acoustic doppler velocimeters. Journal of Hydraulic Engineering 131(12): 1062–1073.

Grant, I. (1997). Particle image velocimetry: a review. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science 211(1): 55–76.

Heller, V. (2007). Landslide generated impulse waves – Prediction of near field characteristics. PhD Dissertation 17 531, ETH Zürich, Zürich.

Hinterberger, C., Fröhlich, J., Rodi, W. (2007). Three-dimensional and depth-averaged large-eddy simulations of some shallow water flows. Journal of Hydraulic Engineering 133(8): 857–872.

Hinze, J.O. (1959). Turbulence – An introduction to its mechanism and theory. McGraw-Hill, New York.

Hoyer, K., Holzner, M., Lüthi, B., Guala, M., Liberzon, A., Kinzelbach, W. (2005). 3D scanning particle tracking velocimetry. Experiments in Fluids 39(5): 923–934.

Ishihara, T., Gotoh, T., Kaneda, Y. (2009). Study of high-Reynolds number isotropic turbulence by direct numerical simulation. Annual Review of Fluid Mechanics 41: 165–180.

Jenny, P., Kleiser, L. (2007). Turbulent flows. Vorlesungsmanuskript, ETH Zürich, Zürich.

Jones, W.P., Launder, B.E. (1972). The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence. International Journal of Heat and Mass Transfer 15: 301–314.

Kármán, T. (1911). Über den Mechanismus des Widerstandes, den ein bewegter Körper in einer Flüssigkeit erfährt. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse: 509–517.

Kimmoun, O., Branger, H. (2007). A particle image velocimetry investigation on laboratory surf-zone breaking waves over a sloping beach. Journal of Fluid Mechanics 588: 353–397.

Kolmogorov, A.N. (1941). Siehe Kolmogorov (1958).

Kolmogorov, A.N. (1958). Die lokale Struktur der Turbulenz in einer inkompressiblen zähen Flüssigkeit bei sehr grossen Reynoldsschen Zahlen. Sammelband zur statistischen Theorie der Turbulenz 71–76. *Goering, H.*, Ed. Akademie-Verlag, Berlin [Deutsche Übersetzung der originalen Publikationen von Kolmogorov von 1941].

Kundu, P.K., Cohen, I.M. (2004). Fluid Mechanics. Elsevier, New York.

Launder, B.E., Reece, G.J., Rodi, W. (1975). Progress in the development of a Reynolds-stress turbulent closure. Journal of Fluid Mechanics 68: 537–566.

Lavoie, P., Avallone, G., De Gregorio, F., Romano, G.P., Antonia, R.A. (2007). Spatial resolution of PIV for the measurement of turbulence. Experiments in Fluids 43(1): 39–51.

Navier, C.L. (1822). Sur les lois du mouvement des fluides, en ayant égard à l'adhésion des molécules. Annales de chimie et de physique 19: 244–260.

Nezu, I., Nakagawa, H. (1993). Turbulence in open-channel flows. Balkema, Rotterdam.

Obuchow, A.M., Jaglom, A.M. (1958). Die Mikrostruktur einer turbulenten Strömung. Sammelband zur statistischen Theorie der Turbulenz 97–126. *Goering, H.*, Ed. Akademie-Verlag, Berlin [Deutsche Übersetzung der originalen Publikation von Obuchow und Jaglom von 1941].

Orszag, S.A., Patterson, G.S.J. (1972). Numerical simulation of three dimensional homogeneous isotropic turbulence. Physical Review Letter 28: 76–79.

Pope, S.B. (2006). Turbulent flows. Cambridge University Press, Cambridge.

Prandtl, L. (1905). Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. 3. Internationaler Mathematiker-Kongress, Heidelberg 484–491. Krazer, A., Ed.

Raffel, M., Willert, C., Kompenhans, J. (1998). Particle image velocimetry – A practical guide. Springer, Berlin.

Reynolds, O. (1883). An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. Philosophical Transactions of the Royal Society of London 174: 935–982.

Richardson, L.F. (1922). Weather prediction by numerical process. Cambridge University Press, Cambridge.

Rodi, W. (1984). Turbulence models and their application in hydraulics – A state of the art review. IAHR, Madrid.

Schlichting, H., Gersten, K. (1997). Grenzschicht-Theorie. Springer, Berlin.

Smagorinsky, J. (1963). General circulation experiments with the primitive equations: I. The basic equations. Monthly Weather Review 91: 99–164.

Taylor, G.I. (1935). Statistical theory of turbulence: Parts I–III. Proceedings of the Royal Society of London A 151: 421–464.

Tennekes, H., Lumley, J.L. (1997). A first course in turbulence. MIT Press, Massachusetts.

Uijttewaal, W.S.J., Jirka, G.H. (2003). Grid turbulence in shallow flows. Journal of Fluid Mechanics 489: 325–344.

Van Dyke, M. (1982). An album of fluid motion. Parabolic Press, California.

Weitbrecht, V., Muste, M., Creutin, J.-D., Jirka, G.H. (2007). Geschwindigkeitsmessungen mit Particle-Image-Velocimetry: Labor- und Feldmessungen. Mitteilungsblatt der Bundesanstalt für Wasserbau 90: 79–90.

Anschrift des Verfassers

Dr. *Valentin Heller*

School of Civil Engineering and the Environment, University of Southampton, Highfield, Southampton, SO17 1BJ, UK

Tel. +44 (0)23 80 59 46 52

V.heller@soton.ac.uk

ehemals VAW, ETH Zürich