

**Zeitschrift:** Jahrbuch der Sekundarlehrerkonferenz des Kantons Zürich  
**Herausgeber:** Sekundarlehrerkonferenz des Kantons Zürich  
**Band:** - (1911)

**Artikel:** Aus dem Unterrichte in der Mathematik : zwanglose methodische Betrachtungen  
**Autor:** Keller, K.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-819520>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 10.01.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Aus dem Unterrichte in der Mathematik

## Zwanglose methodische Betrachtungen

von K. Keller, Winterthur.

### Praktische Vorteile beim Rechnen.

Die Umrechnung *englischer Münzen in Dezimalen von Pfund (£)*.  
Um shillings (s) und pence (d) in Dezimalen von £ auszudrücken, multipliziert man die s mit 5 und erhält Hundertstels-Pfunde, die d mit  $4\frac{1}{6}$  und erhält Tausendstels-Pfunde; denn

$$1 \text{ s} = \frac{1}{20} \text{ £} = 0,05 \text{ £} \text{ und}$$

$$1 \text{ d} = \frac{1}{240} \text{ £} = \frac{25}{6000} \text{ £} = \frac{4\frac{1}{6}}{1000} \text{ £}$$

$$\begin{array}{r} \text{Z. B. } \text{£ } 10 \cdot 12 \cdot 8 = \text{£ } 10, \\ \quad + 5 \cdot 12 = \quad \quad 60 \\ \quad + 4\frac{1}{6} \cdot 8 = \quad \quad 333 \dots \\ \hline \quad \quad \quad \text{£ } 10,6333 \dots \end{array}$$

Umgekehrt dividiert man die Hundertstels-Pfund durch 5 und erhält die s, die Tausendstels-Pfund durch  $4\frac{1}{6}$  und erhält die d.

$$\text{Z. B. } \text{£ } 10,7632 = \text{£ } 10 \cdot 15 \cdot 3$$

$$76 : 5 = 15 \text{ s}$$

$$13,2 : 4\frac{1}{6} = \frac{13,2 \cdot 6}{25} = 3 \text{ d}$$

Die Umrechnung von *Fahrenheitgraden in Zentesimalgrade und umgekehrt* geschieht nach der Formel:

$$n^{\circ} \text{ F} = (n - 32) \frac{5}{9} \text{ }^{\circ} \text{ C}$$

$$\text{Da aber } \frac{5}{9} = 0,555 \dots$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{100} + \dots,$$

so braucht man von der Differenz  $n - 32$  nur die Hälfte zu nehmen und zu dieser den 10. und den 100. Teil zu addieren.

$$\begin{aligned} \text{Z. B. } 74^{\circ} \text{ F} &= \frac{74 - 32}{2} = (21 + 2,1 + 0,21^{\circ} \text{ C}) \\ &= 23,3^{\circ} \text{ C} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ferner } -6^{\circ} \text{ F} &= \frac{-6 - 32}{2} = (-19 - 1,9 - 0,19)^{\circ} \text{ C} \\ &= -21,1^{\circ} \text{ C} \end{aligned}$$

Für die Verwandlung von Celsiusgraden in solche des Fahrenheitschen Thermometers haben wir die Formel:

$$n^{\circ} \text{ C} = \frac{9}{5} n + 32^{\circ} \text{ F}$$

Da aber  $\frac{9}{5} = 2 - \frac{2}{10}$ , so haben wir von dem Zweifachen der Celsiusgrade den 10. Teil davon zu subtrahieren und zur Differenz 32 zu addieren.

$$\text{Z. B. } 36^{\circ} \text{ C} = (72 - 7,2 + 32)^{\circ} \text{ F} = 96,8^{\circ} \text{ F}$$

$$\text{und } -20^{\circ} \text{ C} = (-40 - (-4) + 32)^{\circ} \text{ F} = -4^{\circ} \text{ F}$$

### Umformungen der Proportionen.

Pag. 10, Bodmer III.

Zur Befestigung der Lehre von den Proportionen in der 2. Klasse dürfte es angezeigt sein, statt der Aufgaben 60, 61 und 62, welche im Grunde Gleichungen mit mehreren Unbekannten sind, durch eine Zusammenfassung in allgemeinen Zahlen die Umformungen einer Proportion darzustellen, etwa in folgender Weise.

Wenn die Proportion  $a : b = c : d$  richtig ist, so ist auch

$$1) a \cdot z : b \cdot z = c : d \quad \text{und} \quad \frac{a}{z} : \frac{b}{z} = c : d$$

$$2) a : b = c \cdot z : dz \quad \text{und} \quad a : b = \frac{c}{z} : \frac{d}{z}$$

$$3) a \cdot z : b \cdot z = c \cdot y : d \cdot y \quad \text{und} \quad \frac{a}{z} : \frac{b}{z} = \frac{c}{y} : \frac{d}{y}$$

$$4) a \cdot z : b = c \cdot z : d \quad \text{und} \quad \frac{a}{z} : b = \frac{c}{z} : d$$

$$5) a : b \cdot z = c : dz \quad \text{und} \quad a : \frac{b}{z} = c : \frac{d}{z}$$

$$6) az : b = c : \frac{d}{z} \quad \text{und} \quad \frac{a}{z} : b = c : dz$$

$$7) a : b \cdot z = \frac{c}{z} : d \quad \text{und} \quad a : \frac{b}{z} = cz : d$$

$$8) (a \pm b) : b = (c \pm d) : d$$

Die letzte Umformung 8) fehlt im Buche. Sie ist aber notwendig bei der Bildung des Volumens des Pyramidenstumpfes, wenn man die quadratische Gleichung umgehen will; z. B.

$$G : g = (h + x^2) : x^2$$

$$\sqrt{G} : \sqrt{g} = h + x : x$$

$$(\sqrt{G} - \sqrt{g}) : \sqrt{g} = h : x$$

wodurch eine Gleichung vom 1. Grade entsteht, aus welcher die Unbekannte  $x$  berechnet werden kann.

Auch bei Berechnung der Länge des *geometrischen* Erdschattens leistet die Umformung 8) wertvolle Dienste.

In der folgenden Figur (siehe Mondfinsternis in Wettstein, Geographie, pag. 193, ergibt sich aus der Ähnlichkeit der Dreiecke  $SAC$  und  $EB C$ :

$$SC : EC = AS : BE$$

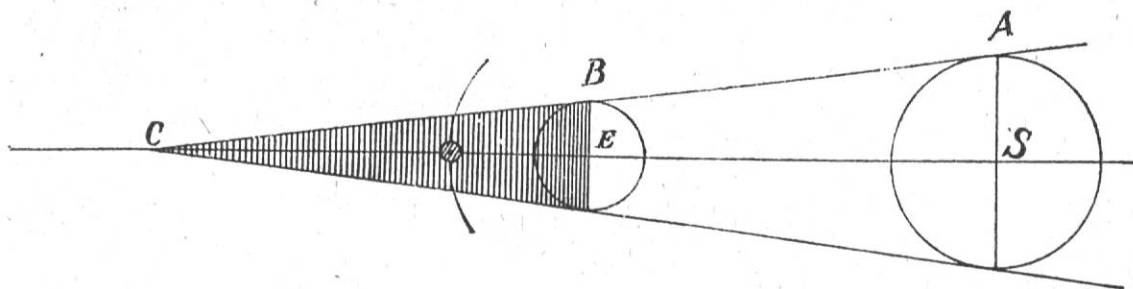
$$(SC - EC) : EC = (AS - BE) : BE$$

$$EC = \frac{SE \cdot BE}{AS - BE}$$

und wenn der Sonnenabstand = 149 Mill km,

der Erdradius = 6350 km,

der Sonnenradius = 696000 km gesetzt wird,



$$\begin{aligned} \text{geom. Mondsch. EC} &= \frac{149\,000\,000 \cdot 6350}{690\,000} \text{ km} \\ &= \text{rund } 1\,400\,000 \text{ km} \\ &= \text{rund } 3 \times \text{den Mondabstand} \end{aligned}$$

### Zeichenregel für die Multiplikation.

Wenn bei der Multiplikation die Faktoren auch negativ sein können, so lassen sich bei 2 Faktoren 4 Fälle unterscheiden:

- |  |                   |
|--|-------------------|
| 1) $(+5) \times (+4)$ oder allgemein $(+a) \cdot (+b)$ |                   |
| 2) $(-5) \times (+4)$                                  | $(-a) \cdot (+b)$ |
| 3) $(+5) \times (-4)$                                  | $(+a) \cdot (-b)$ |
| 4) $(-5) \times (-4)$                                  | $(-a) \cdot (-b)$ |

Wenn sich die zwei ersten Fälle leicht auf die Addition zurückführen lassen, so versagt diese Art vollständig bei den zwei letzten Fällen, wenn der Multiplikator negativ ist; denn so verständlich es dem Schüler ist, dass der Multiplikand 4 mal als Summand gesetzt werde, so unverständlich und nichtssagend ist ihm, dass der Multiplikand minus viermal als Summand gesetzt werde. Da kann folgende Ableitung von *Rüefli* (Bern) gute Dienste leisten:

ad. 2) Das Produkt von  $a - a$  mit  $b$  muss gleich 0 sein. Da nun das Produkt von  $a$  mit  $b = ab$ , so muss  $-a$  mit  $b = -ab$  sein, um  $+ab$  zu vernichten.  $-a \cdot b = -ab$ .

ad. 3) Das Produkt von  $a$  mit  $b - b$  muss gleich 0 sein. Da nun  $a$  mit  $b = ab$ , so muss  $a$  mit  $-b = -ab$  sein, um  $+ab$  zu vernichten.  $a \cdot -b = -ab$ .

ad. 4) Das Produkt von  $-a$  mit  $b - b$  muss gleich 0 sein. Da nun  $-a \cdot b = -ab$  nach 2), so muss  $-a$  mit  $-b$  gleich  $+ab$  sein, um  $-ab$  zu vernichten.  $-a \cdot -b = +ab$ .

Hieraus ergibt sich erst, dass die Faktorenverwechslung allgemein gestattet ist.

### Das Abkürzen der Brüche.

Pag. 52, Bodmer III.

Nr. 435 b)  $\frac{a-b}{b-a}$ , erweitert mit  $-1$  gibt

$$\begin{aligned} &= \frac{-1(a-b)}{a-b} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Nr. 435 c)  $\frac{4x-4}{3-3x} = \frac{4(x-1)}{3(1-x)}$ , erweitert mit  $-1$

$$\begin{aligned} &= \frac{-4(x-1)}{3(x-1)} \\ &= -1\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Die Anwendung auf Gleichungen erfolgt in Nr. 265, pag. 63.

$$\begin{aligned} (a - b)x &= b - a \\ x &= \frac{b - a}{a - b} \\ &= \frac{-1(b - a)}{b - a} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Die Erweiterung eines Bruches mit  $-1$  ist bei besondern Gleichungen des 1. Grades angezeigt, wenn der gewöhnliche Weg auf eine quadratische Gleichung führen würde, z. B.

$$\begin{aligned} \frac{7x - 5}{3x - 7} - \frac{6 - 5x}{7 - 3x} &= 1 \quad (\text{der 2. Bruch wird mit} \\ &\quad -1 \text{ erweitert.)} \\ \frac{7x - 5}{3x - 7} - \frac{5x - 6}{3x - 7} &= 1 \\ 7x - 5 - 5x + 6 &= 3x - 7 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

### Zinseszinsen-Rechnung.

1) Berechnung des *Endwertes* eines Kapitals  $k$  zu  $p\%$  in  $n$  Jahren mit Zins und Zinseszins.

$k$  = ursprüngliches Kapital;  $k_1, k_2, \dots, k_n$  seien die Kapitalwerte nach 1, 2 ...  $n$  Jahren.

Es ist der Kapitalwert nach 1 Jahr

$$k_1 = k + \frac{kp}{100} = k \left(1 + \frac{p}{100}\right) = k \cdot v, \text{ wenn } \underline{1 + \frac{p}{100} = v}$$

$$k_2 = k_1 + \frac{k_1 p}{100} = k_1 \left(1 + \frac{p}{100}\right) = kv \cdot v = kv^2$$

$$k_3 = k_2 + \frac{k_2 p}{100} = k_2 \left(1 + \frac{p}{100}\right) = kv^2 \cdot v = kv^3$$

⋮

$$k_n = k \cdot v^n$$

Setzen wir in dieser Formel  $k=1$ , so wird bei  $4\%$

$$k_1 = 1 \left(1 + \frac{4}{100}\right) = 1,04$$

$$k_2 = 1 \left(1 + \frac{4}{100}\right)^2 = 1,04^2 = 1,0816$$

$$k_3 = 1 \left(1 + \frac{4}{100}\right)^3 = 1,04^3 = 1,124864 \text{ etc. d. h. gleich den Werten}$$

in Tabelle a bei  $4\%$  auf pag. 31 von Bodmer III. Ähnlich erhält man die *Aufzinsungsfaktoren* für jeden andern Zinsfuß.

Mit Hülfe der Aufzinsungsfaktoren in Tabelle a pag. 31 können die Aufgaben 138–148 gelöst werden. In der Tabelle für  $3\frac{1}{2}\%$  ist  $k_5$  zu korrigieren in 1,187686.

Z. B. Nr. 145:

Wert nach 100 Jahren =  $31,191408 \cdot 50\,000 = \text{Fr. } 1\,559\,570,40$

Wert von Fr. 1 559 570,40 nach 50 Jahren =  $5,584927 \cdot 1\,559\,570,40 = \text{Fr. } 8\,680\,000,00$

1 559 570,40  
 7 294 855  
 7 797 852 000  
 779 785 200  
 124 765 632  
 6 238 282  
 1 403 613  
 31 191  
 10 917

8 710 086,835 = Fr. 8 710 086,84

2) Berechnung des *Anfangswertes*, wenn der Endwert gegeben ist.

Da nach 1)  $k_n = kv^n$ , so ist

der Anfangswert  $k = \frac{k_n}{v^n}$  und wenn  $k_n = 1$

$$k = \frac{1}{v^n}, \text{ wobei } v \text{ wie früher} = 1 + \frac{p}{100}$$

So ist bei  $3\frac{1}{2}\%$  z. B., wenn der Endwert nach 6 Jahren = 1, der

$$\text{Anfangswert } k = \frac{1}{1,035^6}$$

und da nach Tabelle a  $1,035^6 = 1,22925533$ , so ist

$$k = 1 : 1,22925533 = 0,8135006$$

So sind in *Tabelle b* die *Abzinsungsfaktoren* bei  $3\frac{1}{2}\%$  und  $4\%$  berechnet und darnach sind die Aufgaben 149—152 zu rechnen. Z. B. Nr. 152: Endwert 15 000 Fr. in 40 Jahren zu  $3\frac{1}{2}\%$ . Anfangswert = ?

Für 1 Fr. Endwert ist der Anfangswert = 0,2525725 Fr.

" 15 000 " " " " " = 15 000 . 0,2525725 Fr.

252,5725

51

2525 725

1262 863

3788,588 = Fr. 3788,59

3) Berechnung des *Endwertes* von *n* *jährlichen* *gleichen* und zu *Anfang* *jedes* *Jahres* gemachten Zahlungen.

Zahlung = 1

1. Jahr Endwert nach 1) =  $v$ , wobei  $v = 1 + \frac{p}{100}$

2. " " =  $(v + 1) \cdot v = v + v^2$

3. " " =  $(v + v^2 + 1) \cdot v = v + v^2 + v^3$

⋮

n. " " =  $v + v^2 + v^3 + \dots + v^n$

Die Werte  $v, v^2, v^3, \dots$  etc. sind die Aufzinsungsfaktoren in *Tabelle a*. Durch fortgesetzte Addition derselben erhält man die Werte in *Tabelle c*, z. B. bei  $4\%$  Verzinsung:

1. Jahr Endwert = 1,04

2. " " = 1,04 + 1,0816 = 2,1216

3. " " = 1,04 + 1,0816 + 1,124864 = 3,246464

Diese Endwerte gleicher jährlicher Zahlungen sind in *Tabelle c* für eine Anzahl Jahre und für  $3\frac{1}{2}\%$  und  $4\%$  berechnet. Darnach sind die Aufgaben 153—159 zu berechnen. Z. B.

Nr. 154) Endwert =  $500 \cdot 29,269471$  Fr. = Fr. 14634,74

Nr. 157) Jährliche Einlage =  $x$  Fr.; dann besteht die Gleichung

$$x \cdot 5,550152 = 1000, \text{ woraus}$$

$$x = \frac{1000}{5,550152}$$

$$= 180,18 \text{ Fr.}$$

#### 4. Berechnung der Annuität (Jahresleistung) bei Tilgungsplänen (Amortisationen).

Aufgaben 160—163 des obligatorischen Lehrmittels.

Da die Berechnung der allgemeinen Formel für Annuitäten für Schüler der Sekundarschule zu schwierig ist, stützt sich die Lösung der obigen Aufgaben auf die Formeln in 1) und 3). Z. B. Aufgabe 160 c.

Nach 5 Jahren:

$$\begin{aligned} \text{Schuld} &= 200\,000 \cdot 1,216253 \text{ (Tabelle a)} && = \text{Fr. } 243\,330,60 \\ \text{Guthaben} &= 12\,000 \cdot 4,416323 + 12\,000 \text{ (Tabelle c)} && = \text{„ } 64\,995,88 \\ \text{Restschuld nach 5 Jahren (seit Beginn der Schuld)} &&& \\ &&& \text{also am 1. Januar 1899} = \text{Fr. } 178\,334,72 \end{aligned}$$

Nach 25 Jahren:

$$\begin{aligned} \text{Schuld} &= 200\,000 \cdot 2,665836 && = \text{Fr. } 533\,167,20 \\ \text{Guthaben} &= 12\,000 \cdot 40,645908 + 12\,000 && = \text{„ } 499\,750,90 \\ \text{Restschuld nach 25 Jahren, also am 1. Januar 1919} &&& = \text{Fr. } 33\,416,30 \end{aligned}$$

Da in der Tabelle das Jahr 24 fehlt, so muss die Zahl 40,645908 in Tabelle c für 24 Jahre berechnet werden. Man erhält sie nach 3), indem man von 43,311745 in Tabelle c für 25 Jahre 2,665836 in Tabelle a für 25 Jahre subtrahiert, wobei zu berücksichtigen ist, dass in Tabelle c die letzte Ziffer aufgerundet ist. Eine Berechnung auf 8 Dezimalen ergibt nämlich in Tabelle c 25 Jahre 43,31174462

$$\begin{aligned} & \text{„} \quad \text{„} \quad \text{a 25} \quad \text{„} \quad \underline{2,66583633} \\ & \text{Differenz} = 40,64590829 \\ & = 40,645908 \end{aligned}$$

Aufgabe 161. Annuität = x Fr. Dann besteht die Gleichung

$$\begin{aligned} x \cdot 30,969202 &= 80\,000 \cdot 2,191123 \\ x &= 5660,13 \end{aligned}$$

Aufgabe 162. Annuität = x Fr. Diese beginnt erst nach dem 1. Jahre, wächst daher in 14 Jahren an auf  $x \cdot 18,295681$  (Tabelle c, bei 14 Jahren und  $3\frac{1}{2}\%$ ). Dazu kommt noch die 15. Annuität x. Die Gesamtleistung in 15 Jahren ist somit  $x \cdot 18,295681 + x$  und wenn diese die Schuld amortisieren soll, so besteht die Gleichung

$$\begin{aligned} x \cdot 18,295681 + x &= 140\,000 \cdot 1,035^{15} \text{ (Tabelle a, 15 Jahre)} \\ x \cdot 19,295681 &= 234\,548,86 \\ x &= 12\,155,50 \end{aligned}$$

Probe: Fr. 12155,50 jährliche Zahlungen wachsen in 14 Jahren zu  $3\frac{1}{2}\%$  an auf  $12155,50 \cdot 18,295681 = 222\,393,15$  Fr.

$$\begin{aligned} + 15. \text{ Annuität} &= \underline{12\,155,50 \text{ „}} \\ & 234\,548,65 \text{ Fr.} \end{aligned}$$

$$\text{Differenz} = \quad \quad \quad 0,21 \text{ „}$$

herrührend davon, dass die in den Tabellen berechneten Werte für Kapitalien in der Höhe von über 100 000 Fr. 2 Dezimalen zu wenig haben.

\* \* \*

*Bemerkung:* Die vorstehenden Ausführungen wollen nicht eine erschöpfende Behandlung der Zinseszinsenrechnung sein, sondern nur

eine Andeutung, wie dieselbe mit Schülern der 3. Klasse der Sekundarschule behandelt werden können. Die allgemeine Behandlung dieser Aufgaben setzt die Kenntnis der *Logarithmen* voraus, wie aus folgendem ersichtlich ist.

Wenn  $k$  das Anfangskapital,  $k_n$  das Endkapital,  $p$  der Zinsfuss,  $n$  die Anzahl der Jahre, so lässt sich, wenn drei dieser Grössen gegeben sind, die 4. immer bestimmen. So ist nach 1)

$$k_n = kv^n \text{ und hieraus}$$

$$1) \quad \log k_n = \log k + n \log v$$

$$2) \quad \log k = \log k_n - n \log v$$

$$3) \quad n = \frac{\log k_n - \log k}{\log v}$$

Aus  $k_n = k \cdot v^n$  folgt

$$v^n = \frac{k_n}{k} \text{ und wenn beiderseits die } n. \text{ Wurzel ausgezogen wird,}$$

$$v \text{ oder } 1 + \frac{p}{100} = \sqrt[n]{\frac{k_n}{k}}$$

$$4) \quad p = 100 \left( \sqrt[n]{\frac{k_n}{k}} - 1 \right)$$

Bei Anwendung der logarithmischen Formeln ist man dann nicht durch die Tabellen behindert, die nur eine beschränkte Zahl von Zinsfüssen und Jahren angeben können. So müsste dann die Aufg. 145 (siehe in Abschnitt 1) nicht in zwei Teilen gerechnet werden, zuerst für 100 und dann noch für 50 Jahre, sondern man fände nach 1)

$$\begin{aligned} \log k_{150} &= \log k + 150 \log 1,035 \\ &= 4,6989700 + 150 \cdot 0,0149403498 \\ &= 6,9400225 \end{aligned}$$

$$k_{150} = 8710087,76 \text{ Fr.}$$

Die Differenz von Fr. 0,92 gegenüber dem Resultat in 1) ist leicht erklärlich aus dem Umstande, dass in den Tabellen  $\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$  nur auf 6 Dezimalen berechnet ist, was bei einer Multiplikation mit 50000 um 2 Dezimalen zu wenig ist, um die Einer richtig zu erhalten. Das Resultat ist daher in jener Berechnung um obigen Betrag von 0,92 Fr. zu klein

### Terminrechnungen.

Aufgaben 71—76 in Bodmer III.

1) *Bestimmung des mittleren Zinsfusses.* Folgende Kapitalien sind sämtlich für  $m$  Monate zu verzinsen:  $k_1$  Fr. à  $p_1$  ‰;  $k_2$  Fr. à  $p_2$  ‰;  $k_3$  Fr. à  $p_3$  ‰. Zu welchem *mittleren Zinsfuss* würden diese Kapitalien denselben Zins abwerfen?

Der mittlere Zinsfuss  $x$  muss so gewählt werden, dass der Zins des Gesamtkapitals zu  $x$  ‰ in 7 Monaten gleich ist der Summe der Einzelzinse der drei Kapitalien. Es besteht somit die Gleichung:

$$\frac{(k_1 + k_2 + k_3) \cdot x \cdot m}{100 \cdot 12} = \frac{k_1 p_1 m}{100 \cdot 12} + \frac{k_2 p_2 m}{100 \cdot 12} + \frac{k_3 p_3 m}{100 \cdot 12}, \text{ woraus}$$

$$x = \frac{k_1 p_1 + k_2 p_2 + k_3 p_3}{k_1 + k_2 + k_3}$$

Sind  $n$  Kapitalien zu  $n$  verschiedenen Zinsfüssen, so erhalten wir analog wie oben die allgemeine Formel:



$$\text{Mittlerer Zinsfuss } x = \frac{k_1 p_1 + k_2 p_2 + \dots + k_n p_n}{k_1 + k_2 + \dots + k_n}$$

Dieser Bruch wird im praktischen Rechnen durch 100 abgekürzt, Wenn z. B.  $k_1 = 900$  Fr.,  $k_2 = 1000$  Fr. und  $k_3 = 1200$  Fr.,  $p_1 = 4,5\%$ ,  $p_2 = 4,75\%$  und  $p_3 = 5\%$ , so ist  $x$  durch folgende Darstellung leicht erhältlich:

900 Fr. à 4,5 %	40,5	9 · 4,5 = 40,5
1000 „ à 4,75 %	47,5	10 · 4,75 = 47,5
1200 „ à 5 %	60	etc.
3100 Fr.	148 : 31 = 4,77 %	
	240	
	230	

2. *Berechnung der mittleren Verfallzeit.* Es seien die Kapitalien  $k_1, k_2, \dots, k_n$  alle zu  $p\%$  zu verzinsen,  $k_1$ , zahlbar nach  $t_1$ ,  $k_2$  nach  $t_2, \dots, k_n$  nach  $t_n$  Tagen. Welches ist der mittlere Zahlungstermin für alle Summen?

Soll die Bezahlung aller Summen nach  $x$  Tagen stattfinden, so muss  $x$  so gewählt werden, dass der Zins der Gesamtsumme in  $x$  Tagen zu  $p\%$  gleich ist der Summe der Einzelzinse in den verschiedenen Verfallzeiten. Es besteht somit die Gleichung:

$$\frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_n) p \cdot x}{100 \cdot 360} = \frac{k_1 p t_1}{100 \cdot 360} + \frac{k_2 p t_2}{100 \cdot 360} + \dots + \frac{k_n p t_n}{100 \cdot 360}, \text{ woraus}$$

$$\text{Mittlere Verfallzeit } x = \frac{k_1 t_1 + k_2 t_2 + \dots + k_n t_n}{k_1 + k_2 + \dots + k_n}$$

Auch dieser Bruch wird wie in 1) durch 100 abgekürzt, wodurch die Darstellung vereinfacht wird; z. B.

600 Fr. zahlbar nach 90 Tagen	540	(6 · 90 = 540)
400 „ „ „ 150 „	600	etc.
700 „ „ „ 270 „	1890	
1700 Fr.	3030 : 17 = 178,2	
		= <u>179 Tage</u>

Sind endlich die *Zinsfüsse und Zahlungstermine verschieden*, so berechnet man nach 1) zuerst den mittleren Zinsfuss und dann nach 2) die mittlere Verfallzeit.

$$\text{Der mittlere Zinsfuss ist nach 1) } = \frac{k_1 p_1 + k_2 p_2 + \dots + k_n p_n}{k_1 + k_2 + \dots + k_n}$$

Dann ist die mittlere Verfallzeit  $x$  so zu wählen, dass der Zins des Gesamtkapitals zum mittleren Zinsfuss in der gesuchten Zeit  $x$  gleich ist der Summe der Einzelzinse der verschiedenen Kapitalien. Es besteht somit die Gleichung:

$$(k_1 + k_2 + \dots + k_n) \cdot \frac{k_1 p_1 + k_2 p_2 + \dots + k_n p_n}{k_1 + k_2 + \dots + k_n} \cdot \frac{x}{100 \cdot 360} =$$

$$\frac{k_1 p_1 t_1}{100 \cdot 360} + \frac{k_2 p_2 t_2}{100 \cdot 360} + \dots + \frac{k_n p_n t_n}{100 \cdot 360}, \text{ woraus}$$

$$x = \frac{k_1 p_1 t_1 + k_2 p_2 t_2 + \dots + k_n p_n t_n}{k_1 p_1 + k_2 p_2 + \dots + k_n p_n}$$

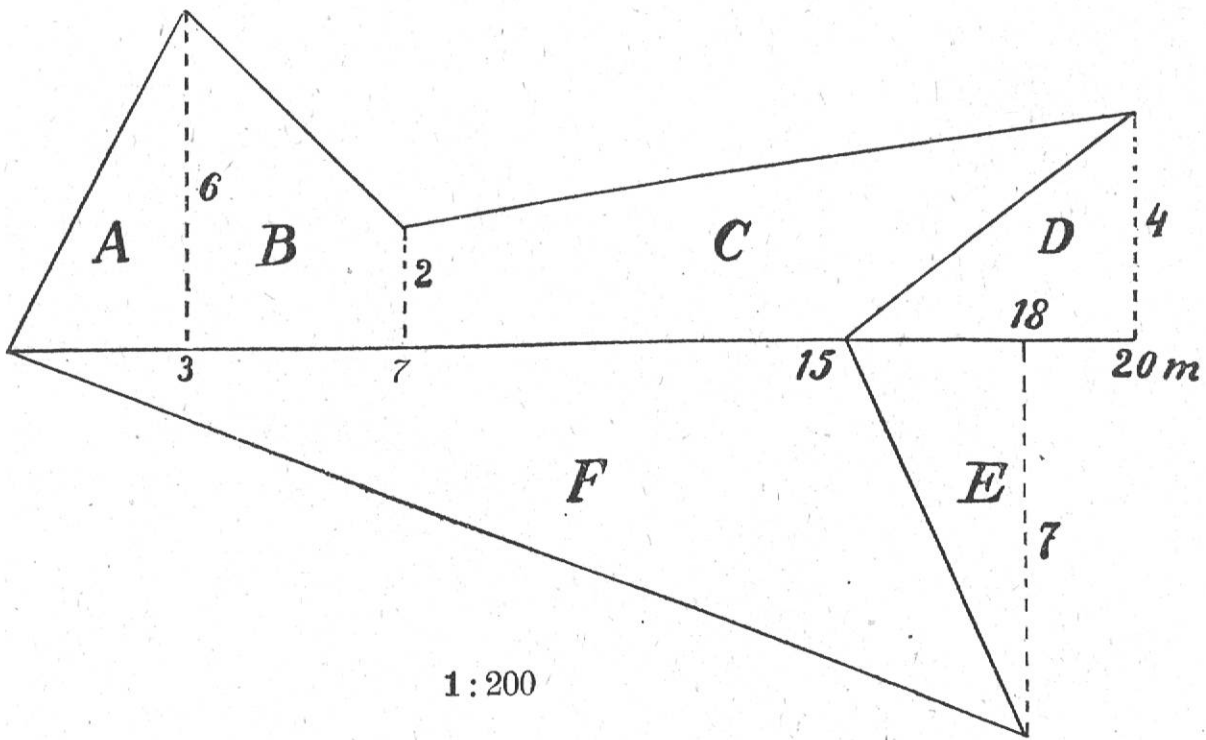
Es seien zu bezahlen: 400 Fr. à 6% nach 120 Tagen; 800 Fr. à 5% nach 180 Tagen; 1200 Fr. à 4% nach 240 Tagen. Wann und zu welchem Zinsfuss können diese Summen auf einmal bezahlt werden?

Mittlerer Zinsfuss:	Fr. 400 à 6 0/0	24
	„ 800 à 5 0/0	40
	„ 1200 à 4 0/0	48
	Fr. 2400	112 : 24 = 4 <sup>2/3</sup> 0/0

$$\begin{aligned} \text{Mittlere Verfallzeit} &= \frac{400 \cdot 6 \cdot 120 + 800 \cdot 5 \cdot 180 + 1200 \cdot 4 \cdot 240}{400 \cdot 6 + 800 \cdot 5 + 1200 \cdot 4} \\ &= 192,8 \text{ Tage} \\ &= \underline{193 \text{ Tage}}. \end{aligned}$$

Die Formel 3) ist nur der Vollständigkeit wegen aufgeführt; Aufgaben hiefür sind in der Aufgabensammlung keine.

**Berechnung des Inhaltes eines unregelmässigen Polygons.**



Anlage eines Schemas:

Parzelle	Ordinaten		Summe	Abszissen	Doppelter Inhalt		Bemerkungen
	+	-			+	-	
A	0	6	6	3	18		
B	6	2	8	4	32		
C	2	4	6	13	78		
D	4	0	4	— 5		20	
E	0	7	7	— 3		21	
F	7	0	7	18	126		
				38	254		
				— 8	41		
				30 : 2 = 15	213 : 2 = 106,5 m <sup>2</sup>		

Kontrolle: Jede Ordinate muss zweimal in der Rechnung vorkommen; denn sie gehört zwei Figuren an, wofern nicht eine Seite des Polygons auf der Diagonale senkrecht steht.

Die Summe der Abszissen ist das Doppelte der grossen Diagonale,

*Bemerkung.* Sämtliche Figuren, in welche das Polygon durch die Ordinaten auf die Abszissenachse zerfällt, werden als Trapeze betrachtet, auch die rechtwinkligen Dreiecke und als solche berechnet. Anstatt bei jedem Trapez das Produkt aus der Summe der Parallelen (Ordinaten) und der Höhe (Abszisse) durch 2 zu dividieren, wird diese Operation erst am Schlusse an der Summe der Produkte vorgenommen; daher der Titel doppelter Inhalt. Die Parzellen D und E liegen ausserhalb des Polygons und müssen daher, weil sie bei C und F mitgerechnet werden, subtrahiert werden.

