Aufgaben für den Rechenunterricht der III. Klasse Sekundarschule

Aufgaben für den Rechenunterricht der III. Klasse Sekundarschule

zusammengestellt von EMIL GASSMANN, Winterthur

Allgemeine Bemerkungen.

Das 3. Heft dieser Aufgabensammlung knüpft an den I. Abschnitt des 2. Heftes an, indem nun die Veranschaulichung von Mengen behandelt wird. Es gilt zunächst die Anschauungsgrundlage für das Verhältnis ähnlicher Körper zu schaffen. Dann folgt die systematische Behandlung der 3. Potenz und 3. Wurzel. Das Interesse der Schüler wird gefesselt durch die genaue Betrachtung und Kritik unrichtiger Veranschaulichungen. Solche finden sich leider in illustrierten Zeitungen und Reklameschriften in genügender Zahl. Eine Schülerin brachte mir sogar aus derselben Zeitschrift eine größere Zahl von Ausschnitten, die ausnahmslos durch irreführende Vergleichsbilder der Volksaufklärung dienen sollten. Es sei darum nochmals betont, daß es sich bei der Verknüpfung des Veranschaulichungsproblems mit der mathematischen Aufgabe des Wurzelzeichens um eine wirklich praktische Anwendung handelt.

Bei der Zusammenstellung des II. Abschnittes habe ich mich gefragt, ob es nicht zweckmäßig wäre, Tabellen mit den Aufzinsungsfaktoren aufzunehmen, unterließ es aber aus zwei Gründen. Einmal macht die für eine Aufgabensammlung notwendige Beschränkung die Auswahl schwer und verengt damit auch das Gebiet der Aufgabestellung und anderseits erscheint es mir als eine dankbare Aufgabe, in gemeinsamer Arbeit durch die Klasse selbst die Tabellen des Schulbuches unter Berücksichtigung anderer Zinsfüße ($4^1/_2$ %, 5 %, $5^1/_2$ %, 6 %) zu ergänzen. Das ermöglicht den Schülern einen Einblick in die Arbeit, welche die Herstellung von tabellarischen Erleichterungen voraussetzt, und ist zugleich ein treffliches Anwendungsgebiet für die abgekürzten Rechnungsverfahren.

Die beiden Seiten aus Versicherungsprospekten sind zur Anregung beigegeben. Besser ist es natürlich, auch auf diesem Gebiet die Rechnungen anhand von Prospekten zu machen, die von den Schülern selbst mitgebracht werden. Erfahrungsgemäß steht da genügend Material zur Verfügung.

Durch den III. Abschnitt soll nochmals eine planmäßige und sorgfältige Behandlung der abgekürzten Multiplikation und Division veranlaßt werden. Die Schüler sollen dabei zur Erkenntnis kommen, daß es sich nicht um eine unnütze Gedächtnisbelastung, also Scheinabkürzung handelt, sondern um eine aus mathematischer Notwendigkeit sich ergebende Erweiterung der üblichen Rechnungsverfahren, die nicht zu umgehen ist, wenn man gewisse Aufgaben richtig lösen will (z. B. Herstellung von Tabellen).

Abschnitt IV dieses Heftes ist eine Fortsetzung von Abschnitt II des 2. Heftes. Er beschränkt sich absichtlich auf die genauere Behandlung des englischen Geldes, insbesondere die Zinsrechnung mit diesem. Leicht könnte hier der Kettensatz untergebracht werden, doch wurde dies im Hinblick auf das reiche Aufgabenmaterial des Lehrbuches von Gubler unterlassen.

Auch das Kapitel Algebra unseres obligatorischen Lehrmittels weist ein wohlgeordnetes und gutgewähltes Aufgabenmaterial auf, so daß ich mich im Abschnitt V darauf beschränkte, Hinweise auf die methodische Behandlung einzelner wichtiger Punkte und auf Zusammenhänge mit Anwendungsgebieten der Geometrie zu geben. Speziell diese Beziehungen mit der Geometrie und dem Formelwesen, der Vereinfachung der Rechnungsvorgänge überhaupt, müssen fortgesetzt gezeigt und benutzt werden, um das lebendige Interesse für die Algebra zu wecken und zu erhalten.


WO WIRD DAS MEISTE BROT GEGESSEN?
DÄNEMARK
287 Kg. pro Kopf
BELGIEN
274 Kg. pro Kopf
FRANKREICH
234 Kg. pro Kopf
SCHWEIZ
212 Kg. pro Kopf
DEUTSCHLAND
209 Kg. pro Kopf
SPANIEN
195 Kg. pro Kopf
RUSSLAND
173 Kg. pro Kopf
ITALIEN
125 Kg. pro Kopf

Fig. 1.

I. Dritte Potenz und dritte Wurzel.

Aufgabe 1. Prüft die Veranschaulichung „Wo wird das meiste Brot gegessen?“ auf ihre Richtigkeit. (Fig. 1)

Aufgabe 2. Wie viele gleichgroße Würfel braucht es, um einen solchen von doppelter Seitenlänge darzustellen?

Aufgabe 3. Wieviel mal größer als ein gegebener Würfel ist ein solcher von dreifacher Seitenlänge?

Aufgabe 4. Stellt 8 Zündholzschächtelchen (Länge 6 cm, Breite 2,5 cm, Höhe 2 cm) so zusammen, daß ein Körper von ähnlicher Form entsteht wie das einzelne Schächtelchen. Vergleiche das Ergebnis der Betrachtung mit der Veranschaulichung in Fig. 1.

Aufgabe 5. Welches ist eine einfachste Art, Mengen anschaulich zu vergleichen? (z. B. Säulen von gleichem Querschnitt. Dann wirkt sich das Größenverhältnis linear aus.)

Aufgabe 6. Nennt Stoffe, deren verschiedene Mengen in Würfelform anschaulich dargestellt werden können?

Aufgabe 7. Vergleicht Inhalts- und Seitenverhältnis zweier Würfel.

$$V_1 : V_2 = a_1{}^3 : a_2{}^3$$
$$a_1 : a_2 = \sqrt[3]{V_1} : \sqrt[3]{V_2}$$

Aufgabe 8. Stellt die dritte Potenz einer zweistelligen Zahl durch gewöhnliche Multiplikation und nach der Formel

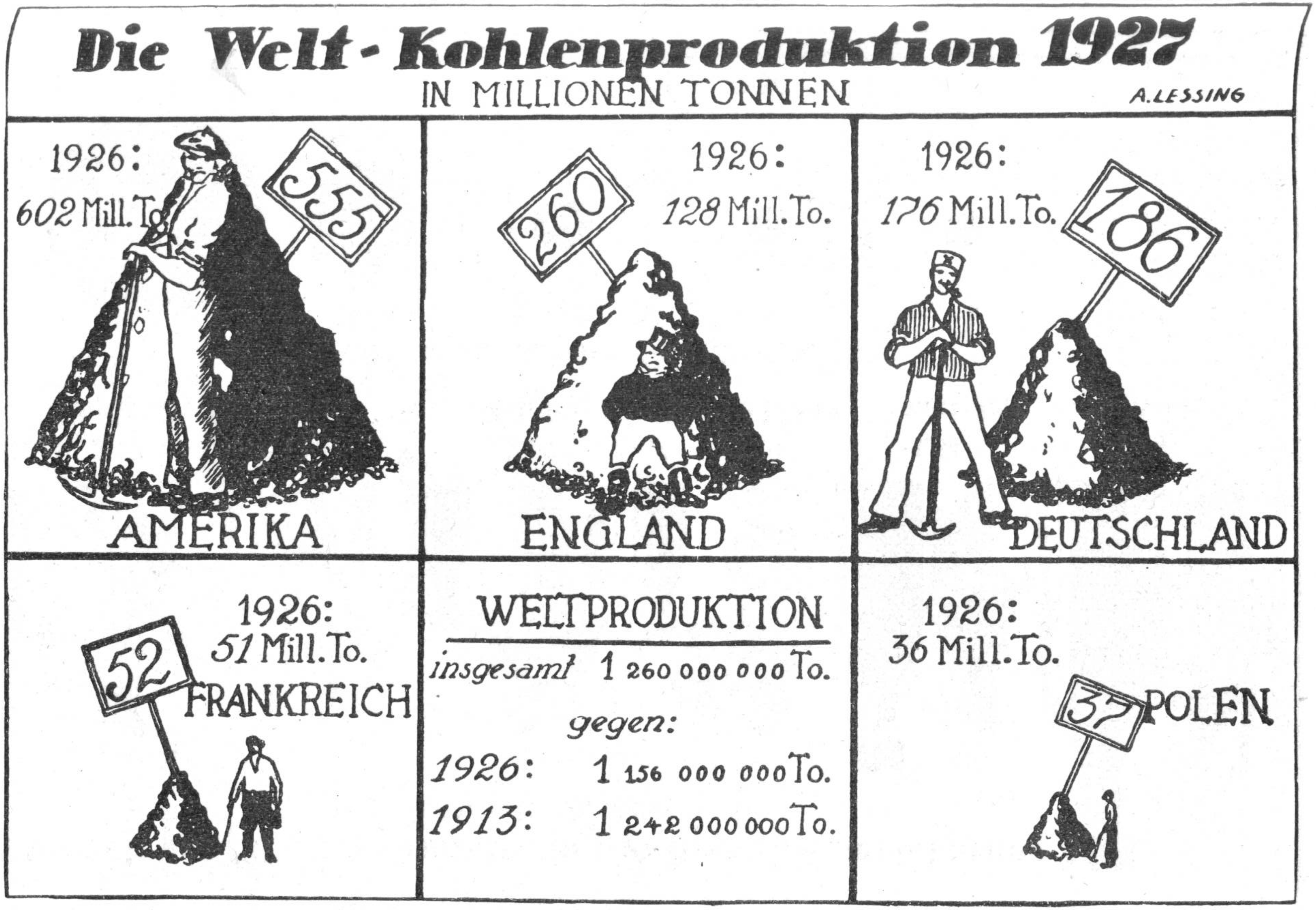
$$(a + b)^3 = a^3 + 3\,a^2 b + 3\,a b^2 + b^3$$

her. 69^3 etc.

Aufgabe 9. Stellt aus festem Papier die durch obige Formel dargestellten 8 Körper, die zusammen den zerlegten Würfel bilden, her. (2 Würfel und 6 Prismen)

Aufgabe 10. Zieht mit Hilfe der Formel $(a + b)^3 = a^3 + 3\,a^2 b + 3\,a b^2 + b^3$ die dritte Wurzel aus 4- bis 6stelligen Kubikzahlen.

Aufgabe 11. Korrigiert die Veranschaulichungen der Figuren 1 bis 4.



Die Welt-Kohlenproduktion 1927
IN MILLIONEN TONNEN
A. LESSING
1926:
602 Mill. To.
555
AMERIKA
1926:
128 Mill. To.
260
ENGLAND
1926:
176 Mill. To.
186
DEUTSCHLAND
1926:
51 Mill. To.
52
FRANKREICH
WELTPRODUKTION
insgesamt 1 260 000 000 To.
gegen:
1926: 1 156 000 000 To.
1913: 1 242 000 000 To.
1926:
36 Mill. To.
37
POLEN

Fig. 2.

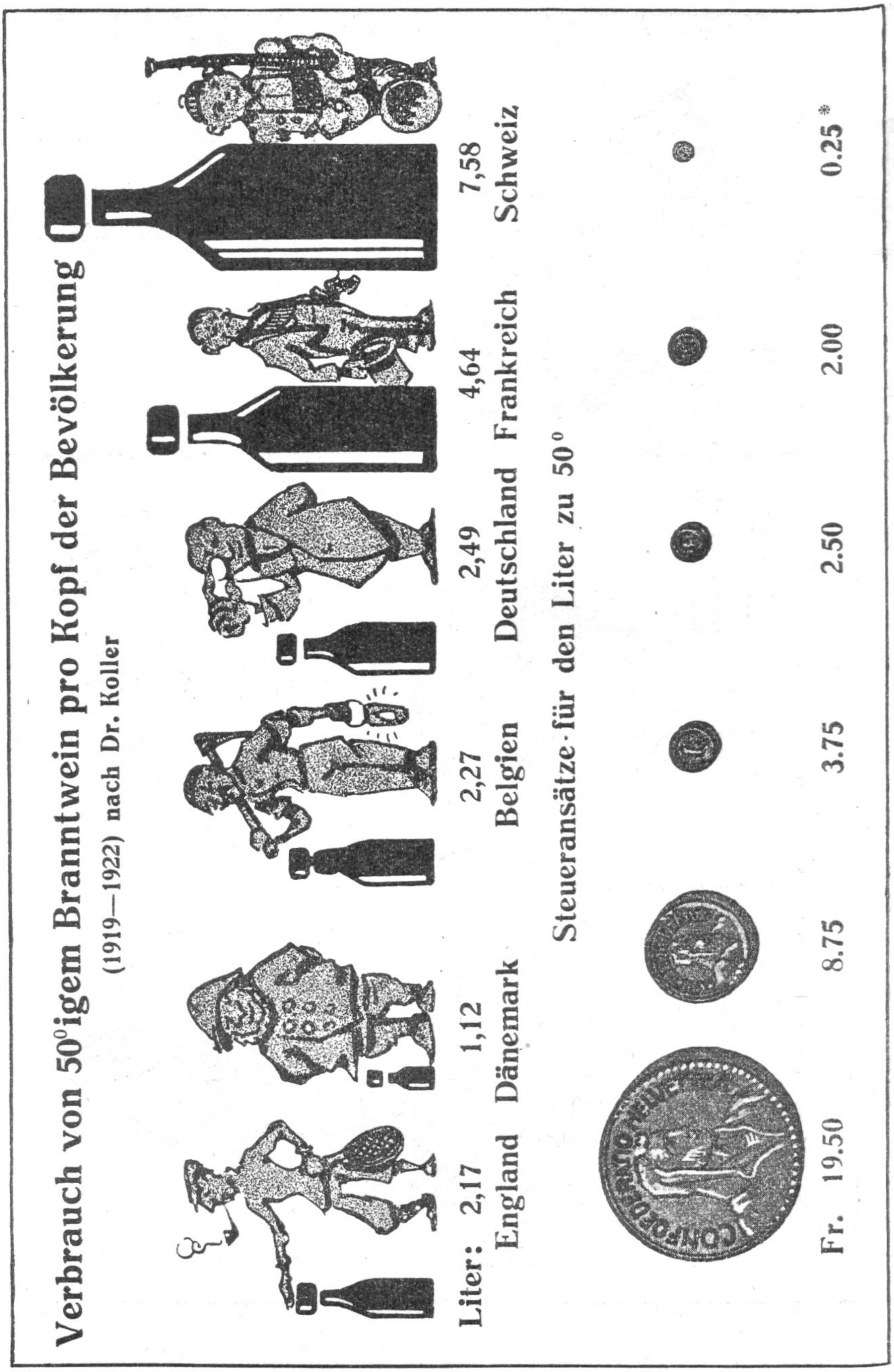

Verbrauch von 50⁰igem Branntwein pro Kopf der Bevölkerung
(1919—1922) nach Dr. Koller
Liter: 2,17 1,12 2,27 2,49 4,64 7,58
England Dänemark Belgien Deutschland Frankreich Schweiz
Steueransätze für den Liter zu 50⁰
Fr. 19.50 8.75 3.75 2.50 2.00 0.25 *

Fig. 3.

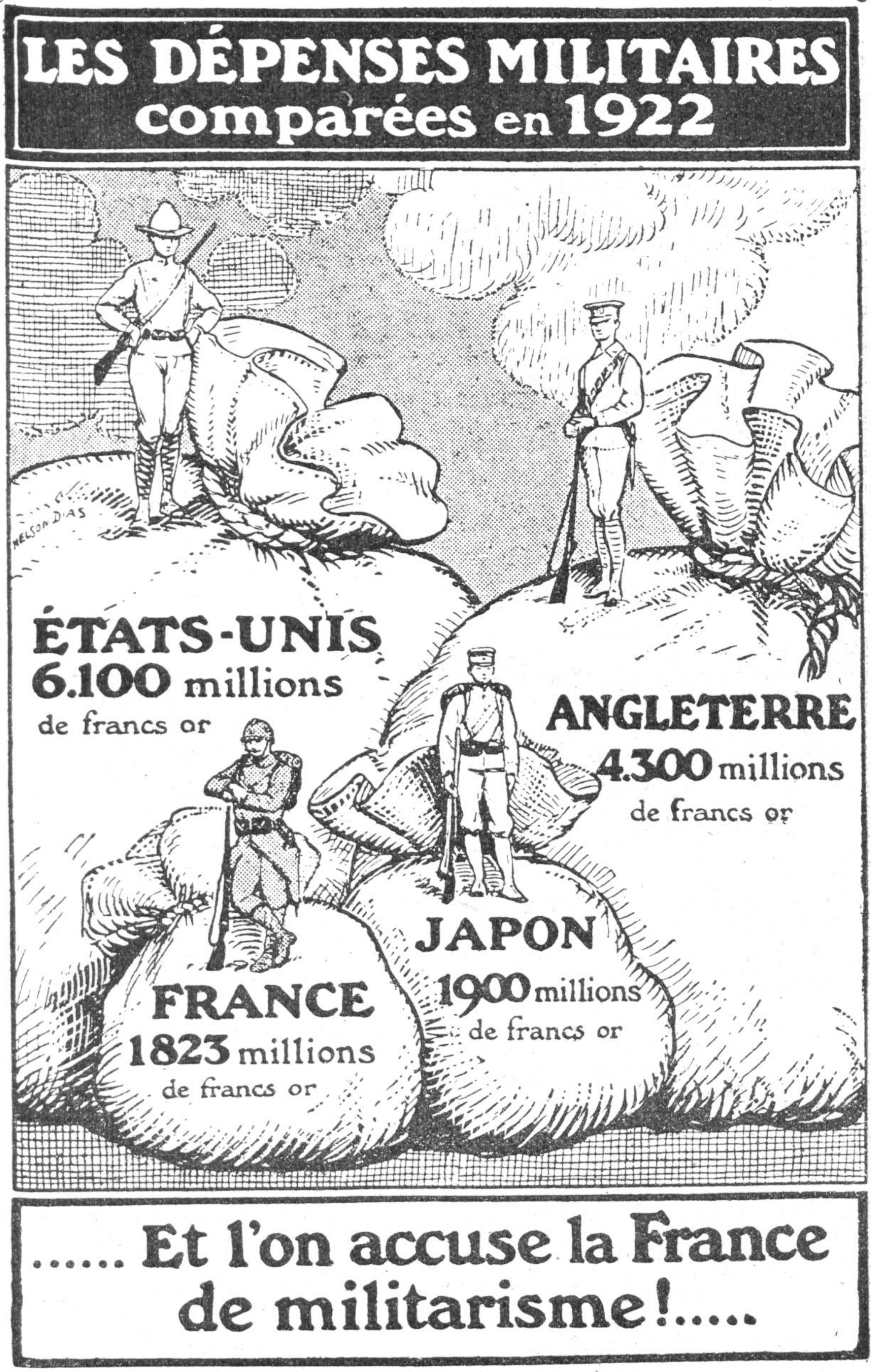

LES DÉPENSES MILITAIRES
comparées en 1922
NELSON DIAS
ÉTATS-UNIS
6.100 millions
de francs or
ANGLETERRE
4.300 millions
de francs or
JAPON
1900 millions
de francs or
FRANCE
1823 millions
de francs or
...... Et l'on accuse la France
de militarisme!.....

Fig. 4.

Aufgabe 12. Berechnet die Konstanten in folgenden Körperformeln:

Zylinder (mit quadratischem Achsenschnitt) $V = 2\,r^3\pi$

Kugel $V = \frac{4}{3}\,r^3\pi$

Pyramide, 4seitig mit gleichen Kanten $V = \frac{\sqrt{2}\,a^3}{6}$

Tetraeder $V = \frac{a^3}{12}\sqrt{2}$

Aufgabe 13. Benutze die berechneten Konstanten in folgenden Aufgaben:

a) Welchen innern Durchmesser hat ein blechener Milchschöpfer, der 1 l faßt? (Achsenschnitt ein Quadrat)

b) Welchen Durchmesser hat ein Kugelballon, der mit 5000 m^3 Gas gefüllt ist?

c) Knaben stellen aus einem m^3 Sand eine (ägyptische) Pyramide her. Welche Seite müssen sie für die Grundfläche wählen? (Kanten gleich)

d) Ich forme aus Lehm zuerst einen Würfel von 1 dm^3 und nachher aus diesem ein Tetraeder. Welche Kante hat dieses?

e) Ich möchte die vier vorgenannten Körper in steifem Papier (resp. Lehm) herstellen so, daß jeder 1 dm^3 groß ist. Welche Maße muß ich wählen?

II. Zinseszins-, Versicherungs- und Amortisationsrechnungen.

Aufgabe 1. Eine Einlage von Fr. 100.— bleibt in einem Kassabüchlein stehen, ohne daß der Zins eingezogen wird. Wie groß ist das Guthaben nach 5 Jahren bei 4 % Zins?

Aufgabe 2. Auf welchen Betrag wächst von Jahr zu Jahr 1 Fr. an mit Zins und Zinseszins zu 4 %? (10 Jahre)

Aufgabe 3. Wie groß ist das Endkapital von k Fr. nach n Jahren zu p %? (k_1 = Kapital nach einem Jahren, k_5 = Kapital nach 5 Jahren etc.)

$$k_1 = k + \frac{kp}{100} = k\left(1 + \frac{p}{100}\right) = kv$$

$$k_2 = k_1 v = kv^2$$

$$k_3 = k_2 v = kv^3$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad v = \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

$$\underline{k_n = kv^n} \qquad \text{(Aufzinsungsfaktor)}$$

Aufgabe 4. Berechnet die Werte des Aufzinsungsfaktors v, v^2, v^3 etc. bis v^{20} für verschiedene Zinsfüße. (Tabelle)

Aufgabe 5. Berechne nach der Tabelle die Endkapitalien von:

Fr.	300.—	zu	4 %	in	10 Jahren
„	500.—	„	4½ %	„	12 „
„	750.—	„	5 %	„	8 „
„	1000.—	„	4½ %	„	16 „

etc.

Aufgabe 6. Wieviele Franken muß ich heute an Zins und Zinseszins legen, damit ich in 20 Jahren zu 4 % Fr. 1000 habe?

$$\text{Fr. } 1000 = kv^{20} \qquad v = 1{,}04$$

$$k = \frac{1000}{1{,}04^{20}} =$$

Allgemeine Lösung:

$$k_n = kv^n$$

$$\underline{k = \frac{k_n}{v^n}}$$

Berechnet man die Werte $\frac{1}{v^n}$, so kann k durch einfache Multiplikation erhalten werden.

Aufgabe 7. Welche Kapitalanlagen wachsen mit Zins und Zinseszins in

a)	5 Jahren	zu	4 %	auf	Fr. 10000	an?
b)	10 „	„	5 %	„	„ 8000	„
c)	20 „	„	$4^1/_2$ %	„	„ 200000	„
d)	16 „	„	4 %	„	„ 1000	„

etc.

Aufgabe 8. Wieviel macht mein Guthaben, wenn ich zum Anfangskapital von Fr. 100.— jährlich je Fr. 100.— hinzulege, nach 5 Jahren zu 4 %?

$$100 . 1{,}04^5 + 100 . 1{,}04^4 + 100 . 1{,}04^3 + 100 . 1{,}04^2 + 100 . 1{,}04$$
$$= 100. \ (1{,}04^5 + 1{,}04^4 + 1{,}04^3 + 1{,}04^2 + 1{,}04)$$

Aufgabe 9. Leite die allgemeine Formel ab für das Endkapital bei gleichen jährlichen Einzahlungen.

Jährliche Zahlungsquote $= q$
Aufzinsungsfaktor $= v$

$$k_1 = q\,v$$
$$k_2 = (q\,v + q)\ v = q\ (v^2 + v)$$
$$k_3 = \{q\ (v^2 + v) + q\}\ v = q\ (v^3 + v^2 + v)$$
$$\ldots \qquad \ldots$$
$$\underline{k_n = q\ (v^n + v^{n-1} + \ldots . + v^2 + v)}$$

Aufgabe 10. Wie groß ist das Endkapital von 30 jährlichen Zahlungen von Fr. 320.— mit Zins und Zinseszins zu 4 %? Vergleiche das Ergebnis mit dem entsprechenden Endkapital in Tabelle 1.

Aufgabe 11. Prüfe das Ergebnis der Aufzinsungen der Prämienzahlungen nach Tabelle 1 mit der zu erwartenden Kapitalabfindung von Fr. 10000.—.

Begründe den Unterschied.

Aufgabe 12. Vergleiche die Versicherungsbedingungen verschiedener Prospekte in ähnlicher Weise.

Aus einem Lebensversicherungs-Prospekt.

Gemischte Versicherung mit Anteil an den Überschüssen

Jährliche Prämien für ein Kapital von 10000

Eintritts-alter	Versicherungsdauer					
	15 Jahre	20 Jahre	25 Jahre	30 Jahre	35 Jahre	40 Jahre
15	674	493	388	320	276	245
16	674	493	388	321	277	247
17	674	494	389	322	278	248
18	674	494	389	323	270	249
19	674	494	389	323	280	250
20	674	494	389	324	281	252
21	674	494	390	324	282	253
22	674	494	390	325	283	255
23	674	494	391	326	284	257
24	674	494	392	327	286	259
25	675	495	393	329	288	262
26	675	497	394	331	291	265
27	676	498	396	333	294	269
28	677	500	398	336	297	273
29	679	502	401	339	301	277
30	681	504	403	342	305	282
31	683	506	406	346	309	287
32	685	508	409	350	314	292
33	687	511	412	354	319	298
34	689	514	416	359	324	305
35	692	517	420	364	330	312
36	695	521	425	369	337	319
37	698	525	430	375	344	327
38	701	529	435	381	351	336
39	704	533	441	388	359	345
40	708	538	447	396	368	355
41	712	544	453	404	378	.
42	717	550	461	413	388	.
43	722	556	469	422	399	.
44	728	563	478	433	411	.
45	734	571	487	444	424	.
46	740	579	497	456	.	.
47	748	589	509	470	.	.
48	756	599	522	485	.	.
49	766	611	536	501	.	.
50	776	623	551	518	.	.

Tabelle 1.

Gemischte Versicherung mit niedrigem Anfangsbeitrag *ohne* ärztliche Untersuchung.

Tarif für Kinderversicherung.

Eintrittsalter	Das Kapital wird fällig beim Ableben des Versicherten oder spätestens in										
	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	Jahren und beträgt für je 1 Fr. Wochenbeitrag:										
	Fr.	Fr.	Fr.	Fr.	Fr.	Fr.	Fr.	Fr.	Fr.	Fr.	Fr.
0-3	480	540	580	640	700	760	820	880	940	1000	1060
4	480	540	600	660	720	780	840	900	960	1020	1080
5	500	560	600	660	720	780	860	920	980	1040	1100
6	500	560	620	680	740	800	860	920	980	1060	1120
7	500	560	620	680	740	800	860	940	1000	1060	1120
8	500	560	620	680	740	800	880	940	1000	1060	1140
9	500	560	620	680	740	800	880	940	1000	1060	1140
10	500	560	620	680	740	800	880	940	1000	1060	1120
11	500	560	620	680	740	800	860	940	1000	1060	1120
12	500	560	620	680	740	800	860	920	980	1060	1120
13	500	560	620	680	740	800	860	920	980	1040	1100
14	500	560	620	680	740	800	860	920	980	1040	1100
15	500	560	620	660	720	780	840	900	980	1040	1100

Nach Zahlung von 8 vollen Quartalbeiträgen hat der Versicherte Anspruch auf Rückvergütung der Überschüsse.

Tabelle 2.

Aufgabe 13. Die Gemeinde B. beschließt den Bau eines neuen Schulhauses mit einem Kostenvoranschlag von Fr. 260 000.—. Die Summe wird der Gemeinde von der Kantonalbank vorgeschossen gegen die Verpflichtung, die Summe innert 20 Jahren durch gleichgroße jährliche Zahlungen zu amortisieren und die verbleibende Schuld mit 5 % zu verzinsen.

Der Sekundarlehrer der Gemeinde erklärt den Dritt-Kläßlern, wie man die Amortisationsquote bestimmen kann. Man denkt sich zunächst, es würde die Schuld von Fr. 260000.— 20 Jahre bestehen bleiben, ohne daß die Gemeinde irgendwelche Abzahlung machte. Dann würde sie anwachsen auf Fr. $260000 \cdot 1{,}05^{20}$. Nun könnte zur selben Zeit durch regelmäßige, gleichgroße jährliche Einzahlungen bei einer Bank ein Fonds geäuffnet werden, der nach 20 Jahren Fr. $260000 \cdot 1{,}05^{20}$

betragen, also zur Rückzahlung der Schuld ausreichen würde. Aus dieser Überlegung ergibt sich die Gleichung:

$$k\ (v + v^2 + v^3 + \ldots v^{20}) = \text{Fr. } 260000 \,.\, 1{,}05^{20}$$

$$k = \text{Fr. } \frac{260000 \,.\, 1{,}05^{20}}{v + v^2 + v^3 + \ldots v^{20}}$$

(Bei dieser Berechnung wäre die Amortisation schon mit 19 Jahren vollzogen, da die erste Zahlung sofort, die 20. zu Anfang des zwanzigsten Jahres erfolgen würde. Statt einen Amortisationsfonds zu schaffen, kann man die jährlichen Quoten gleich als Abzahlungen dem Schuldner aushändigen.)

Aufgabe 14. Wie sieht die Formel aus bei 20 jährlichen Abzahlungen, von denen die erste nach dem ersten Jahr erfolgt.

$$k = \text{Fr. } \frac{260000 \,.\, 1{,}05^{20}}{1 + v + v^2 + \ldots v^{19}}$$

Aufgabe 15. Sucht selber Aufgaben für Amortisationsrechnungen. (Finanzierung von Wasserversorgungen, Trams, Straßenbauten, Kanalisationen, Landverbesserungen in der Gemeinde etc.)

III. Das abgekürzte Rechnen.

(Eine ausgezeichnete Einführung in die Theorie des abgekürzten Rechnens ist das unter obigem Titel bei Orell Füßli erschienene Büchlein von Dr. *C. Brandenberger.*)

Die Multiplikation (Leitaufgabe S. 65, Nr. 4).

Im zweiten Heft wurde gezeigt, wie sehr das Verständnis der abgekürzten Multiplikation durch die Ausführung praktischer Aufgaben bedingt ist. Die Genauigkeitsdiskussion spielte dabei eine wichtige Rolle. Für viele Aufgaben fällt sie aber weg, weil die der Rechnung zu Grunde liegenden Zahlen nicht mit Fehlern behaftet sind. Da tritt an Stelle der Frage nach der *möglichen Genauigkeit* diejenige nach der *sinngemäßen,* also wünschbaren *Genauigkeit.* Unter diesem Gesichtspunkt ist es vorteilhaft, die Schüler vor Beginn der Rechnung folgende drei Fragen beantworten zu lassen:

1. Welche Genauigkeit ist sinngemäß? (Bis auf welchen Stellenwert, resp. auf welche Stelle nach dem Komma genau, soll man das Ergebnis haben?)
2. Kann diese Genauigkeit erreicht werden? (Frage nach der Verläßlichkeit der letzten Stellen und der Vergrößerung der möglichen Fehler.)
3. Wie muß das Produkt vor der Ausrechnung umgeformt werden? (Mechanische Regel: Man richtet es so, daß die höchste Stelle des Multiplikators aus Einern besteht.)

Aufgabe 1. Berechne den Aufzinsungsfaktor v^{20} für den Zinsfuß 5 %. Bei der Lösung dieser Aufgabe fällt die Beantwortung der Vorfragen 2 und 3 weg, da $v = 1{,}05$ als höchste Stelle 1 aufweist und der Genauigkeit der Rechnung keine Schranken gesetzt sind. Bei der Bestimmung der sinngemäßen Genauigkeit (Vorfrage 1) kommt in Betracht, was nachher mit dem Ergebnis angefangen wird. Es dient zur Berechnung des Endwertes eines Kapitals, der in 20 Jahren durch Anwachsen mit Zins und Zinseszins zu 5 % entsteht. Handelt es sich um Kapitalien, die kleiner sind als eine Million, so genügt es, wenn wir v^{20} auf 5 Stellen nach dem Komma berechnen, da alsdann das Endkapital auf Franken genau berechnet werden kann. Hat man es mit größern Zahlen (Kriegsschulden!) zu tun, so spielt auch eine Genauigkeit auf den Franken keine Rolle mehr.

$$v^{20} = v^2 \,.\, v^2 \,.\, v^4 \,.\, v^8 \,.\, v^4$$

Wie ungeheuerlich die Rechnung wird, sehen wir, wenn wir nur v^8 unabgekürzt ausrechnen: $v = 1{,}05$

$$
\begin{array}{ll}
v \,.\, v & = \underline{1{,}05 \,.\, 1{,}05} \\
 & \quad 1{,}05 \\
 & \quad \phantom{1{,}}525 \\
\hline
v^2 \,.\, v^2 & = \underline{1{,}1025 \,.\, 1{,}1025} \\
 & \quad 1{,}1025 \\
 & \quad \phantom{1{,}}11025 \\
 & \quad \phantom{1{,}11}22050 \\
 & \quad \phantom{1{,}110}55125 \\
\hline
v^4 \,.\, v^4 & = \underline{1{,}21550625 \,.\, 1{,}21550625} \\
 & \quad 1{,}21550625 \\
 & \quad \phantom{1{,}}243101250 \\
 & \quad \phantom{1{,}2}121550625 \\
 & \quad \phantom{1{,}21}607753125 \\
 & \quad \phantom{1{,}215}607753125 \\
 & \quad \phantom{1{,}2155}729303750 \\
 & \quad \phantom{1{,}21550}243101250 \\
 & \quad \phantom{1{,}215506}607753125 \\
\hline
v^8 & = 1{,}4774554437890625
\end{array}
$$

v^{16} hätte schon 32 Stellen nach dem Komma, v^{20} 40 Stellen.

Abgekürzte Rechnung:

Da wir auf *5 Stellen* nach dem Komma *genau* rechnen wollen, nehmen wir die sechste noch mit.

$$
\begin{array}{ll}
v^2 & = \underline{1{,}05 \,.\, 1{,}05} \\
 & \ 1{,}05 \\
 & \ \ \ \underline{525} \\
v^4 & = \underline{1{,}1025 \,.\, 1{,}1025} \\
 & \ 1{,}1025 \\
 & \ \ \ 11025 \\
 & \ \ \ \ \ 2205 \\
 & \ \ \ \ \ \ \underline{551} \\
v^8 & = \underline{1{,}215506 \,.\, 1{,}215506} \\
 & \ 1{,}215506 \\
 & \ \ \ 243101 \\
 & \ \ \ \ \ 12155 \\
 & \ \ \ \ \ \ \ 6078 \\
 & \ \ \ \ \ \ \ \ \ 608 \\
 & \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \underline{7} \\
v^{16} & = \underline{1{,}477455 \,.\, 1{,}477455} \\
 & \ 1{,}477455 \\
 & \ \ \ 590982 \\
 & \ \ \ 103422 \\
 & \ \ \ \ \ 10342 \\
 & \ \ \ \ \ \ \ \ \ 591 \\
 & \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 74 \\
 & \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \underline{7} \\
v^{20} & = \underline{2{,}182873 \,.\, 1{,}025} \\
 & \ 2{,}182873 \\
 & \ \ \ 218287 \\
 & \ \ \ \ \ \ \ 4366 \\
 & \ \ \ \ \ \ \ \underline{1091} \\
v^{20} & = 2{,}406617 = \underline{\underline{2{,}40662}}
\end{array}
$$

Aufgabe 2. Wie viele m^3 Gas enthält ein Gasometer, der einen innern Durchmesser von 11,5 m hat und der 7,3 m hoch gefüllt ist?

$$V = r^2 \pi h = 5{,}75^2 \,.\, 7{,}3 \,.\, 3{,}14159$$

1. Eine Genauigkeit auf 1 m^3 genügt.
2. Diese Genauigkeit kann noch knapp erreicht werden, da der größtmögliche Fehler (0,05) mit 5, 7 und 3 multipliziert wird, also etwa 5 betragen kann. Wir rechnen auf Zehntel.

$$
\begin{array}{rl}
r^2 = & 5,75 \cdot 5,75 \\
\hline
& 28,7 \\
& 3,9 \\
& 3 \\
\hline
r^2 h = & 32,9 \cdot 7,3 \\
\hline
& 230,3 \\
& 9,9 \\
\hline
& 240,2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
240,2 \cdot 3,14159 \\
\hline
720,6 \\
24,0 \\
9,6 \\
2 \\
1 \\
\hline
754,5 \\
\underline{\underline{V = 755 \text{ m}^3}}
\end{array}
$$

Aufgabe 3. Ein Wechsel, auf M. 357.65 lautend, soll zum Kurs 100 M. = 123,325 Fr. umgerechnet werden.

$$
\begin{array}{l}
357,65 \cdot 1,23325 \text{ Fr.} \\
\hline
357,65 \\
71,53 \\
10,73 \\
1,07 \\
7 \\
2 \\
\hline
441,07 \text{ Fr.} \qquad \text{Wechselbetrag } \underline{\text{Fr. } 441,07}
\end{array}
$$

Aufgabe 4. Eine Tuchsendung aus London kostet £ 79/6/—. Wie viel macht die Rechnung in Schweizergeld (Kurs 25,235)?

$$
\begin{array}{rl}
1 \text{ £} = & \text{Fr. } 25,23 \\
79,3 \text{ £} = & \text{Fr. } 25,23 \cdot 79,3 \\
= & \underline{\text{Fr. } 2001,14}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
252,35 \cdot 7,93 \\
\hline
1766,45 \\
227,12 \\
7,57 \\
\hline
2001,14
\end{array}
$$

Die abgekürzte Division.

Auch hier empfiehlt es sich, die Schüler daran zu gewöhnen, daß sie vor Beginn des Rechnens sich über folgende drei Punkte Klarheit verschaffen:

1. Welchen Stellenwert hat die erste Ziffer des Ergebnisses?
2. Wie viele Stellen sollen sinngemäß errechnet werden?
3. Vorbereitung der mechanischen Rechnung. (Der Divisor wird auf so viele Stellen verkürzt, als das Ergebnis Ziffern

aufweisen soll. Dabei zählen die Nullen vor der ersten Ziffer nicht.)

Aufgabe 1. Der Umfang eines kreisrunden Teiches mißt 10 m. Wie groß ist sein Durchmesser?

$$d\pi = 10 \text{ m}$$
$$d = \frac{10}{\pi} \text{ m}$$
$$= \underline{\underline{3{,}19 \text{ m}}}$$

Erste Ziffer: Einer
Sinngemäße Genauigkeit: cm
Rechnung: 10 : 3,14

Aufgabe 2. Der Umfang der Erde ist auf 40000 km angesetzt. Wie groß ist der Erdradius?

Erste Ziffer: Tausender
Sinngemäße Genauigkeit: Einer (Kilometer)
Rechnung: $40000 : 6{,}28\dot{3} = \underline{\underline{6366 \text{ km}}}$

2302
417
40
3

Aufgabe 3. Welches Kapital muß ich heute zu 5 % an Zins legen, wenn es in 20 Jahren auf 10000 Fr. anwachsen soll? (s. S. 72)

$$k_n = k\,v^n$$
$$10000 = x\,v^{20} \quad (v^{20} = 2{,}40662)$$
$$x = \frac{10000}{2{,}40662} = \underline{\underline{4155 \text{ Fr.}}}$$

Erste Ziffer: Tausender
Wünschbare Genauigkeit: Einer (ganze Fr.)
Divisorstellen: 4 Rechnung: 10000 : 2,407

Aufgabe 4. Stelle die Tabelle der Anfangswerte für den Endwert von 1 Fr. in 1 bis 20 Jahren zu 5 % (Zins und Zinseszins) her.

$$k = \frac{1}{v^n} \quad \left(\frac{1}{1{,}05}, \frac{1}{1{,}05^2} \cdots \frac{1}{1{,}05^{20}}\right)$$

(Man benutze die Tabelle der Aufzinsungsfaktoren für den Zinsfuß 5 %.)

Aufgabe 5. Berechnet die Zunahme der Wohnbevölkerung der Schweiz von 1850 bis 1928 in % der vorangehenden Volkszählung ausgedrückt.

Wohnbevölkerung der Schweiz		Zunahme absolut	Zunahme %
1850	2392740		
		117754	4,92
1860	2510494		
		144507	5,76
1870	2655001		
		176786	6,66
1880	2831787		
		85967	3,04
1888	2917754		
		397689	13,64
1900	3315443		
		437850	13,30
1910	3753293		
		127027	3,38
1920	3880320		
		ca. 138180	3,56
1928	4018500		

Tabelle 3.

Aufgabe 6. Wie viele Mark sind 100 Fr., wenn 100 M. = 123,35 Fr. sind.

$$123{,}35 \text{ Fr.} = 100 \text{ M.}$$

$$100 \quad „ \quad = \frac{100}{1{,}2335} = \underline{81{,}07 \text{ M.}}$$

Aufgabe 7. Die schweiz. Landwirtschaft lieferte an den Bund in den Jahren 1927 und 1928 folgende Getreidemengen:

1927: 5155089 für 20356000 Fr.
1928: 6881109 „ 27280000 „

Was zahlte der Bund durchschnittlich in jedem dieser Jahre für den q Getreide? <u>(Fr. 39,49 und Fr. 39.65.)</u>

IV. Eine Stelle in England.

Hans Weber, Angestellter bei der Kantonalbank, Bruder des Sekundarschülers Karl Weber, nimmt eine Stelle in einer englischen Bank an. Vor seiner Abreise studiert er nochmals die Zinsberechnung mit englischem Geld und die Umrechnungen *von* englischem und *in* englisches Geld. Hans zeigt Karl die Verfahren der Verwandlung in *eine* Sorte und umgekehrt, sowie die Überführung der Shilling und Pence in Dezimalbruchform von £.

Aufgaben.

1.	£ 15 = 300 s	£ 39 = 780 s
	£ 27 = 540 s	£ 56 = 1120 s
2.	2 s = 24 d	17 s = 204 d
	13 s = 156 d	19 s = 228 d
3.	£ 1 = 240 d	£ 7 = 1680 d
	£ 3 = 720 d	£ 11 = 2640 d

4. £ 4/12/—/ = 92 s = 1104 d
£ 7/ 7/—/ = 147 s = 1764 d
£ 10/15/—/ = 215 s = 2580 d

5. £ 5/10/6/ = 1326 d
£ 8/12/4/ = 2068 d
£ 11/17/9/ = 2853 d

6. 2000 d = 166 s 8 d = £ 8/ 6/ 8

7. 3540 d = 295 s = £ 14/15/—

8. 17932 d = 1494 s 4 d = £ 74/14/ 4

9.	6 d = 0,5 s	1 d = 0,0833 . . . s
	3 d = 0,25 s	10 d = 0,8333 . . . s (6 + 4)
	9 d = 0,75 s	5 d = 0,4166 . . . s (8 − 3)
	4 d = 0,33 . . . s	7 d = 0,5833 . . . s (4 + 3)
	8 d = 0,66 . . . s	11 d = 0,9166 . . . s (8 + 3)
	2 d = 0,166 . . . s	

10. $5\,s\ 6\,d = 5{,}5\,s = £\,0{,}275$
$10\,s\ 4\,d = 10{,}33\ldots s = £\,0{,}5166\ldots$
$11\,s\ 8\,d = 11{,}66\ldots s = £\,0{,}5833\ldots$
$13\,s\ 1\,d = 13{,}0833\ldots s = £\,0{,}654166\ldots$
$15\,s\ 5\,d = 15{,}4166\ldots s = £\,0{,}770833\ldots$

11. $£\,10/\underset{12{,}166}{12/\ 2}/ = £\,10{,}60833\ldots$
$£\,27/\underset{15{,}5833}{15/\ 7}/ = £\,27{,}779166\ldots$
$£\,32/\underset{17{,}9166}{17/11}/ = £\,32{,}895833\ldots$
$£\,47/\underset{18{,}75}{18/\ 9}/ = £\,47{,}9375$

Auf wie viele Dezimalen genau muß man in einem Endergebnis die £ haben? (Auf 3 Stellen; denn 1 Peny ist $^1/_{240}$ £, 0,001 £ somit kleiner als $^1/_4$ Peny.)

12. $£\,0{,}658 = 13\,s\ 2\,d$
$£\,0{,}844 = 16\,s\ 10^1/_2\,d$
$£\,0{,}925 = 18\,s\ 6\,d$
$£\,0{,}278 = 5\,s\ 6^1/_2\,d$

Da man in England bei der Zinsberechnung das Jahr zu 365 Tagen rechnet, kann man das bei uns übliche Zinsnummernverfahren nicht verwenden. Folgende Ableitung zeigt uns ein Verfahren zur Zinsberechnung mit englischem Geld. (Mitgeteilt von Herrn Prof. Dr. Ad. Heß, Winterthur.)

$$z = \frac{kpt}{100 \cdot 365} = \frac{kt2p}{73000}$$

Es ist aber $\frac{1}{73000} = 0{,}0000137 - \frac{1}{730000000}$, also fast genau 0,0000137; somit $z = \frac{k \cdot t \cdot 2p}{100000} \cdot 1{,}37$.

Nun ist $1{,}37 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{30} + \frac{1}{300}$.

Es ergibt sich daher folgende Regel: Multipliziere Kapital mit Anzahl der Tage, mit doppeltem Zinsfuß. Füge hinzu $^1/_3$ davon, $^1/_{10}$ dieses Drittels, $^1/_{10}$ vom letzten Resultat und schneide von der Summe 5 Stellen ab.

Beispiel: £ 7400 zu 4 % in 35 Tagen.

$$\begin{array}{rrl} 7400 \,.\, 35 \,.\, 8 = & 2072000 & \\ & 690667 & = \frac{1}{3} \,.\, 2072000 \\ & 69067 & = \frac{1}{10} \,.\, 690667 \\ & 6907 & = \frac{1}{10} \,.\, 69067 \\ \hline = & 28{,}38641 & \\ \text{Zins} = & \underline{\underline{£\ 28/7/8\tfrac{1}{2}}} & \end{array}$$

Aufgaben. Berechnet nach obigem Verfahren die Zinsen folgender Kapitalien:

a) £ 10000 zu 5 % in 120 Tagen
z = £ 164/8/—/

b) £ 250 zu $4\frac{1}{2}$ % in 150 Tagen
z = £ 4/12/$5\frac{1}{2}$/

c) £ 24 zu $4\frac{3}{4}$ % in 310 Tagen
z = £ 0/19/$4\frac{1}{2}$/

d) £ 32/10/—/ zu 5 % in 105 Tagen
z = £ 0/9/4,2/

e) £ 48/12/9/ zu $5\frac{1}{2}$ % in 200 Tagen
(= £ 48,6285) z = £ 1/1/4/

f) £ 230/15/4/ zu $4\frac{1}{2}$ % in 30 Tagen
(£ 230,7665) z = £ 0/17/1/

V. Einige Ergänzungen zum Kapitel Algebra.

Die Grundoperationen mit der negativen Zahl.

Wertpaare, die zur Anwendung negativer Zahlen Anlaß geben, sind z. B.

Vermögen	—	Schulden
Wärmegrade	—	Kältegrade
Vorwärtsbewegung	—	Rückwärtsbewegung
(allg.: Bewegung	—	Gegenbewegung)
Höhe	—	Tiefe
Zeit vor	—	Zeit nach Chr. Geb.

Wir können *Additon und Subtraktion* positiver und negativer Zahlen mit Hilfe des Schreitens veranschaulichen. Es sollen bedeuten:

Vorwärtsgehen = positives Schreiten
Rückwärtsgehen = negatives „

⊙→ positive Einstellung (Addition)
←⊙ negative „ (Subtraktion)

Die Addition und Subtraktion positiver und negativer Zahlen kann man nun folgendermaßen veranschaulichen:

5 + 2
5 + 1
5 + 0
5 + (−1)
5 + −2
5 − 4
5 − 3
5 − 2
5 − 1
5 − 0
5 − (−1

a) $5 + 2 = 7$ (A = Anfangsstellung E = Endstellung)

```
A                       ⟶ E
O  |  |  |  |  O  |  O
⟶               5  +  2
```

b) $5 - (+2) = 3$

```
A           E    ←┐+ 2
O  |  |  O  |  O|−
⟶               5
```

c) $5 + (-2) = 3$

```
A           E   − 2 ⟶   (2 Schritte rückwärts)
O  |  |  O  |  O
⟶               5
```

d) $5 - (-2) = 5 + 2 = 7$

```
A                 ←┐− − 2 E
O  |  |  |  |  O|  |  O   (2 Schritte rückwärts
⟶               5          nach einer halben
                           Drehung)
```

Aufgabe. Die Schüler schreiten diese Beispiele selber ab.

Weitere Veranschaulichungsaufgaben:

1. Unterschied zwischen höchster Tages- und tiefster Nachttemperatur (Maximum — Minimum).
   Tagestemperatur $+3^0$, Nachttemperatur -8^0
   $3^0 - (-8^0) = 3^0 + 8 = \underline{11^0}$.

2. Ein Beamter erhält zu gleicher Zeit seine Monatsbesoldung von Fr. 750.— und eine Rechnung von Fr. 125.—. Wie viel nimmt er in diesem Augenblick effektiv ein?
   $$\text{Fr. } \{750 + (-125)\} = \text{Fr. } (750 - 125)$$
   $$= \underline{\text{Fr. } 625.—}$$

3. Ein Wohltäter (W) verbrennt vor seinem Tode das Obligo einer armen Frau auf 500 Fr. lautend. Wie verändert sich dadurch sein Erbe und das Besitztum der armen Frau (F)?
   W: $E = V - (+500) = \underline{V - 500}$
   F: $B - (-500) = \underline{B + 500}$

4. In einer Kasse liegen in Silber Fr. 127.—, in Nickel Fr. 8.67, an Banknoten Fr. 380.—, dazu zwei unbezahlte Rechnungen von Fr. 39.20 und Fr. 75.50. Welchen Wert hat effektiv der Inhalt der Kasse?
   $$\text{Fr. } \{127 + 8{,}67 + 380 + (-39.20) + (-75.50)\} = \underline{\text{Fr. } 400.70}$$

5. Der höchste Berg der Erde (Mount Everest) ist 8840 m hoch, die größte Meerestiefe (Nero-Tiefe bei den Marianen im Großen Ozean) mißt 9636 m. Welches ist der Niveau-Unterschied?
   $8840 - (-9636) = 8840 + 9636 = \underline{18476 \text{ m}}$

6. Wie viele m tiefer liegt der Grund des Adriatischen Meeres (zwischen Ancona und Pola) unter demjenigen des Langensees? (Niveau des Langensees 197 m, größte Tiefe 372 m; Tiefe des Adriatischen Meeres an der bezeichneten Stelle 70 m.)
   $(197 - 372) - (-70) = -175 + 70 = \underline{-105}$
   Der Grund des Adriatischen Meeres liegt bei Pola 101 m höher als derjenige des Langensees.

Multiplikation mit negativen Zahlen.

Als geometrisches Abbild eines Produktes kann das Rechteck dienen. Die Fläche kann mit positivem und negativem Vorzeichen bedacht werden, je nachdem sie beim Durchschreiten der Maßstrecken (a, b) zur Linken (+) oder zur Rechten (+) liegt.

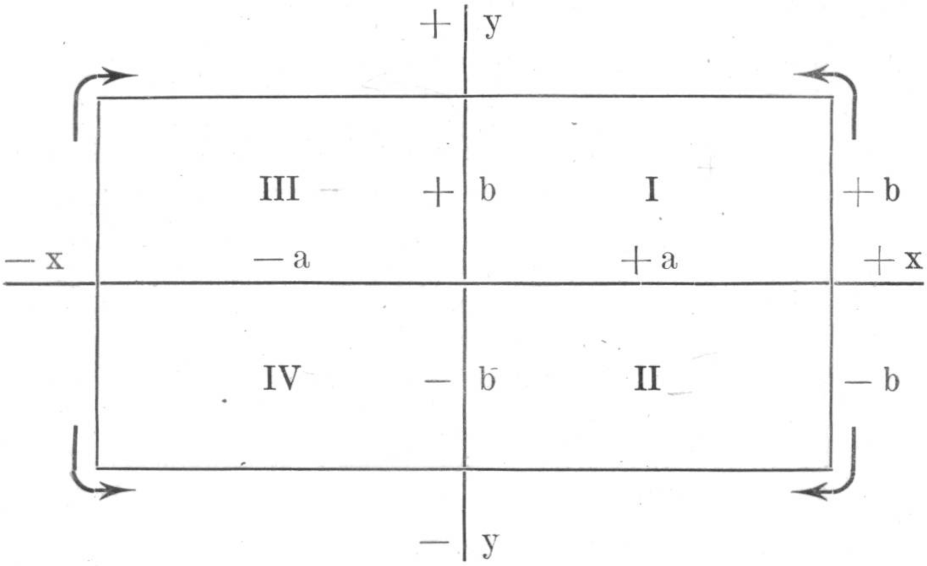


Fig. 5.

I.	Rechteck	$(+a) \cdot (+b) = +ab$	
II.	„	$(+a) \cdot (-b) = -ab$	
III.	„	$(-a) \cdot (+b) = -ab$	
IV.	„	$(-a) \cdot (-b) = +ab$	

Produkt von Summe und Differenz.

$$(a + b)\ c = ac + bc$$

Geometrische Veranschaulichung:

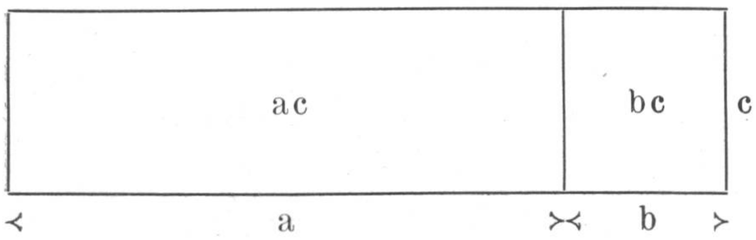


Fig. 6.

$$(a - b)\,c = ac - bc$$

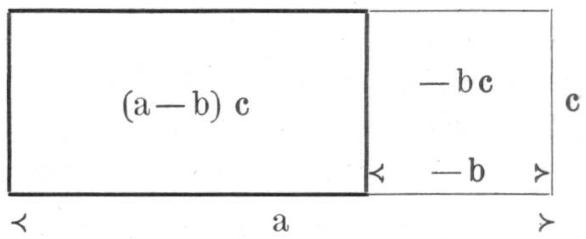


Fig. 7.

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

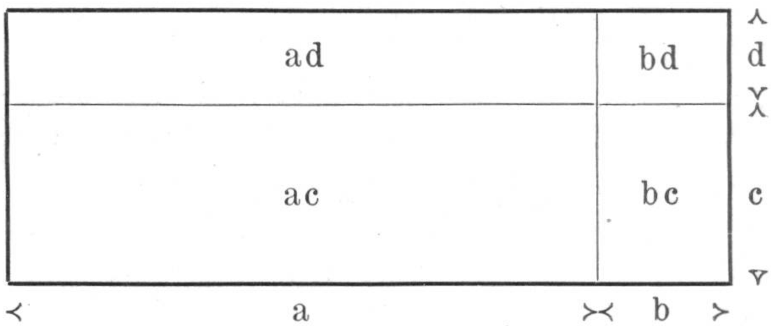


Fig. 8.

$$(a + b)(c - d) = ac + bc - ad - bd$$
$$= (a + b)\,c - (a + b)\,d$$

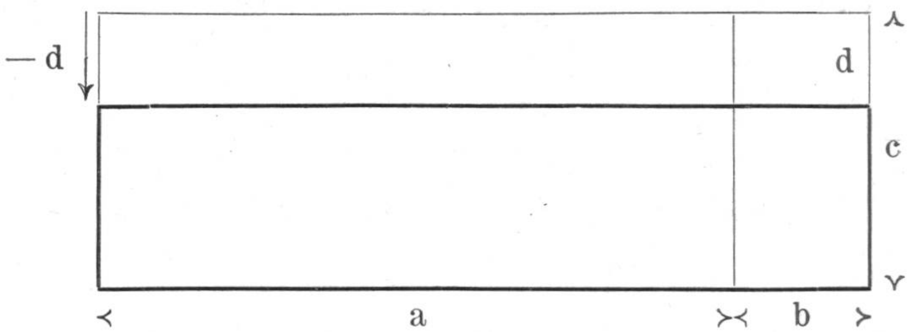


Fig. 9.

Suche die Veranschaulichung für

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

und für

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd$$

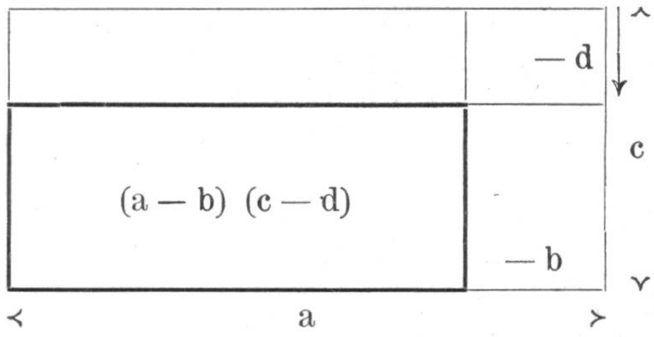


Fig. 10.

Wende die Gleichungen:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

zur Auswertung folgender Ausdrücke an:

1. $(2c+d)^2 =$ $\quad$ $(4x+7y)^2 =$
   $(3a+2b)^2 =$ $\quad$ $(^1/_2\,a + {}^1/_3\,b)^2 =$

2. $(5a+b)(5a-b) =$
   $(m+3n)(m-3n) =$
   $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) =$
   $(\sqrt{ax}+\sqrt{ay})(\sqrt{ax}-\sqrt{ay}) =$
   $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{y}}\right) =$
   $(4pq+2rs)(4pq-2rs) =$
   $(^2/_3\,ax + {}^3/_4\,by)(^2/_3\,ax - {}^3/_4\,by) =$

3. $(3x-2y)^2 =$
   $(ax-by)^2 =$
   $(5ax-7by)^2 =$
   $\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{3}\right)^2 =$

Zusammenfassen:

4. $9a^2 + 12ab + 16b^2 = (3a+4b)^2$
   $^1/_4\,x^2 + {}^1/_3\,xy + {}^1/_9\,y^2 = (^1/_2\,x + {}^1/_3\,y)^2$
   $16a^2x^2 + 40abxy + 25b^2y^2 = (4ax+5by)^2$
   $2r^2 + 4rs + 8s^2 = (\sqrt{2}\,r + \sqrt{8}\,s)^2$

5. $4a^2 - 9b^2 = (2a + 3b)(2a - 3b)$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = \left(\frac{x}{3} + \frac{y}{5}\right)\left(\frac{x}{3} - \frac{y}{5}\right)$$

$$\frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b$$

$$\frac{x^2 - y^2}{x + y} = x - y$$

6. Volumen des Kegelstumpfs?

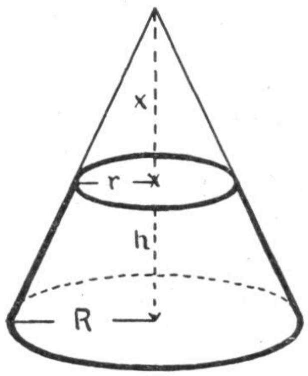


Fig. 11.

$$V = V \text{ des ganzen Kegels} - V \text{ des kleinen Kegels}$$

$$\begin{aligned} V &= {}^1/_3 R^2\pi\,(h + x) - {}^1/_3 r^2\pi x \\ &= {}^1/_3 \pi\,(R^2 h + R^2 x - r^2 x) \\ &= {}^1/_3 \pi \left\{R^2 h + x\,(R^2 + r^2)\right\} \end{aligned}$$

Zwischenrechnung zur Bestimmung von x

$$\begin{aligned} R : r &= (h + x) : x \\ Rx &= rh + rx \\ x &= \frac{rh}{R - r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= {}^1/_3 \pi \left\{R^2 h + \frac{rh\,(R^2 - r^2)}{R - r}\right\} \\ &= \underline{{}^1/_3 \pi h\,(R^2 + Rr + r^2)} \end{aligned}$$

7. Ableitung der Heron'schen Formel.

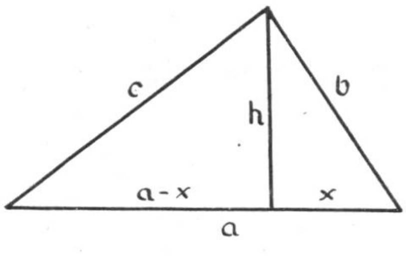


Fig. 12.

(Fläche des Dreiecks aus den drei Seiten berechnet.)

$$F = \frac{a}{2} h$$

(h muß durch die bekannten Werte a, b, c ausgedrückt werden.)

$$\begin{aligned} h^2 &= b^2 - x^2 \\ &= c^2 - (a - x)^2 \\ b^2 - x^2 &= c^2 - a^2 + 2ax - x^2 \end{aligned}$$

$$x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$$

$$h^2 = b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)^2$$

$$= \left(b + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)\left(b - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)$$

$$= \frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2a} \cdot \frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2a}$$

$$= \frac{(a+b)^2 - c^2}{2a} \cdot \frac{c^2 - (a-b)^2}{2a}$$

$$= \frac{(a+b+c)\,(a+b-c)\,(a+c-b)\,(c+b-a)}{4a^2}$$

$$= \frac{2s\,.\,2(s-c)\,.\,2(s-b)\,.\,2(s-a)}{4a^2}$$

$$= \frac{4s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}{a^2}$$

$$h = \frac{2}{a}\sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$$

$$F = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$$

Das Faktoren-Absondern bei geometrischen Ableitungen.

1. Kreisberechnung.

(s = Sehne des n-Ecks, h = Höhe des Teildreiecks, d. h. Abstand der Sehne vom Zentrum.)

$F = {}^1/_2\, h s_1 + {}^1/_2\, h s_2 + \ldots {}^1/_2\, h s_n$		
$= {}^1/_2\, h\,(s_1 + s_2 + \ldots s_n)$		Grenzübergang
$= {}^1/_2\, u r$	$u = 2 r \pi$	$h = r$
$F = r^2 \pi$		$u = s_1 + s_2 + \ldots s_n$

2. Übergang von der dreiseitigen zur vielseitigen Pyramide.

$$V = {}^1/_3\, G_1 h + {}^1/_3\, G_2 h + \ldots {}^1/_3\, G_n h$$
$$= {}^1/_3\, h\,(G_1 + G_2 + \ldots G_n)$$
$$= {}^1/_3\, G h$$

Vereinfachung von Formeln für spezielle Fälle.

In der Formel für den Pyramidenstumpf

$$V = \frac{1}{3} h \left(G + \sqrt{Gg} + g\right)$$

sind die Formeln für Kegelstumpf, Kegel, Pyramide, Prisma und Zylinder enthalten (Grenzfälle).

Kegelstumpf: $(G = R^2\pi \quad g = r^2\pi)$

$V = \frac{1}{3} h\pi \left(R^2 + Rr + r^2\right)$

Kegel: $(r = o)$

$V = \frac{1}{3} h\pi\, R^2$

Pyramide: $(g = o)$

$V = \frac{1}{3} Gh$

Prisma: $(G = g)$

$V = \frac{1}{3} h \left(G + G + G\right)$

$= Gh$

Zylinder: $(R = r)$

$V = \frac{1}{2} h\pi \left(r^2 + r^2 + r^2\right)$

$= r^2\pi\, h$

Die Lösung von Gleichungen.

Zur Erklärung der Veränderungen, die mit einer Gleichung vorgenommen werden können, um den Wert der Unbekannten zu berechnen, dient sehr zweckmäßig das Bild der Wage. Das Gleichgewicht der Wage wird nicht gestört, wenn man aus beiden Schalen gleich viel abhebt, wenn man auf beiden Seiten gleich viel zusetzt, oder wenn man die Gewichte beider Seiten gleich vervielfacht oder teilt.

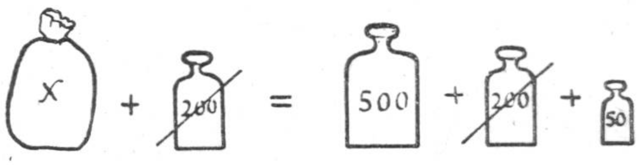


Fig. 13.

$$x = 500 + 50 = 550$$

Das Hinübernehmen eines Summanden auf die andere Seite mit verändertem Vorzeichen kann in der Weise veranschaulicht werden, daß es auf der andern Seite nach oben zieht, d. h. in entgegengesetzter Richtung wirkt und darum ebenfalls entlastet.

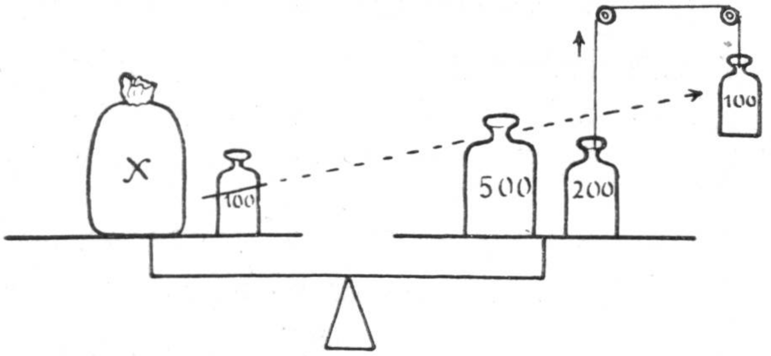


Fig. 14.

$$x + 100 = 500 + 200$$
$$x = 500 + 200 - 100$$
$$x = 600$$

Umkehrung geometrischer Formeln.

Rechteck	$F = a \cdot b$	$a = \frac{F}{b}$	
Dreieck	$F = \frac{gh}{2}$	$g = \frac{2F}{h}$	$h = \frac{2F}{g}$
Kreis	$F = r^2\pi$	$r = \sqrt{\frac{F}{\pi}}$	
Prisma	$V = Gh$	$h = \frac{V}{g}$	$G = \frac{V}{h}$
Zylinder	$V = r^2\pi h$	$r = \sqrt{\frac{V}{r^2 h}}$	$h = \frac{V}{r^2 h}$
Pyramide	$V = {}^1/_3 Gh$	$G = \frac{3V}{h}$	$h = \frac{3V}{G}$
Kegel	$V = {}^1/_3 r^2\pi h$	$r = \sqrt{\frac{3V}{\pi h}}$	$h = \frac{3V}{r^2 h}$
Kugel	$V = {}^4/_3 r^3\pi$	$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$	
Tedraeder	$V = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$	$a = \sqrt[3]{\frac{12V}{\sqrt{2}}}$	

Durch einmalige Berechnung konstanter Faktoren (z. B. ${}^4/_3\pi$) können viele Rechnungen vereinfacht werden (s. S. 64).

Umkehrung der Zinsformel.

Wie einfach algebraische Umformungen gegenüber direkten Ableitungen oft sind, läßt sich an der Zinsformel zeigen.

$$z = \frac{k \,.\, p \,.\, t}{100 \,.\, 360}$$

Es ist noch verhältnismäßig leicht, die Zwischenergebnisse bei der Ableitung der Formel für k und für p zu benennen:

$\frac{z}{t}$ = Tageszins

$\frac{z \,.\, 360}{t}$ = Jahreszins

$\frac{z \,.\, 360}{t \,.\, p} = 1\,\%$

$\frac{z \,.\, 360 \,.\, 100}{t \,.\, p} = 100\,\% = k$

$\frac{z \,.\, 360}{t \,.\, k}$ = Jahreszins von 1 Fr.

$\frac{z \,.\, 360 \,.\, 100}{t \,.\, k}$ = Jahreszins von 100 Fr. = p

Schwieriger ist es, sich bei der Ableitung für t zurechtzufinden.

I. Ableitung:

$\frac{z}{p} = 1\,\%$

$\frac{z \,.\, 100}{p}$ = Kapital, das in 360 Tagen z Fr. Zins brächte

$\frac{z \,.\, 100 \,.\, 360}{p}$ = Kapital, das in 1 Tag z Fr. Zins brächte.

Dieses Kapital ist t mal größer als k; denn k bringt erst in t Tagen z Fr. Zins. Also finden wir t, indem wir obiges Kapital durch k teilen.

$$t = \frac{z \,.\, 100 \,.\, 360}{p\,k}$$

II. Ableitung:

$$\text{Tageszins} = \frac{k \,.\, p}{100 \,.\, 360}$$

z ist der Zins von so viel Tagen, als der Tageszins in z enthalten ist.

$$t = z : \frac{k \,.\, p}{100 \,.\, 360} = \frac{z \,.\, 100 \,.\, 360}{k \,.\, p}$$

Für die Algebra sind alle drei Umformungen gleich leicht.